Chapitre I

Démonstration par récurrence

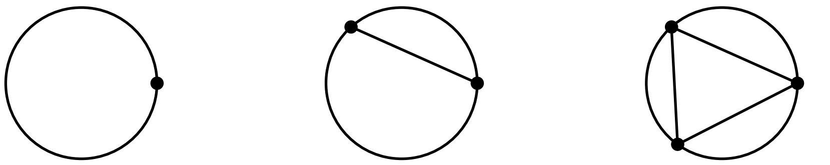
I - LE PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Exemple

Plusieurs personnes sont réunies dans une pièce, combien de poignées de mains sont nécessaires pour que tout le monde se soit salué ?

Exemple

On place des points sur un cercle et on les relit tous entre eux, combien de zones dans le cercle sont ainsi crées ?



etc...

Raisonnement par récurrence

Soit une propriété $\mathscr{P}$ définie sur $\mathbb{N}$. Si :

1. la propriété est **initialisée** à partir d'un certain rang n_0 :
$$\mathscr{P}(n_0) \text{ est vraie}$$
2. la propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang n_0 (c'est à dire que pour tout nombre n plus grand que n_0) :
$$\text{Si } \mathscr{P}(n) \text{ est vraie alors } \mathscr{P}(n+1) \text{ est vraie}$$

Alors la propriété est vraie à partir du rang n_0.

Vocabulaire

La propriété $\mathscr{P}(n)$ est appelée **hypothèse de récurrence**.

II - DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

A) Génération d'une suite

Définition

Une suite réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un rang $n_{init} \in \mathbb{N}$ (souvent $n_{init} = 0$ ou 1).

On note $(u_n)_{n \geqslant n_{init}}$ (plus rarement u). Pour $n \in \mathbb{N}$, l'image de n par u est noté u_n plutôt que $u(n)$.

Remarque

Il y a plusieurs façons de définir une suite :

- Explicitement : c'est à dire en fonction de n.
- Implicitement et en particulier les suites définies par récurrence : on donne un ou plusieurs termes initiaux et une relation de récurrence, c'est à dire un terme de la suite en fonction du (ou des) termes précédent(s).

B) Suites arithmétiques et géométriques

	Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0	Suite géométrique de raison q et de premier terme v_0
Définition par récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = v_n \times q$
Définition explicite	$u_n = u_0 + n \times r$	$v_n = v_0 \times q^n$
Relation entre deux termes u_n et u_p	$v_n = v_p + (n-p) \times r$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$
Somme des premiers termes $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$	$S_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$	$S_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

III - SENS DE VARIATION

A) Suite monotone

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est *croissante* lorsque $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier n
- La suite (u_n) est *décroissante* lorsque $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier n
- La suite (u_n) est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Remarque

Si une suite est définie explicitement à l'aide d'une fonction f croissante, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est aussi croissante.
ATTENTION : la réciproque n'est pas vraie !

B) Détermination de la variation

1) $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$

Propriété

Si l'on réussit à déterminer que :

- $u_{n+1} - u_n > 0$ alors la suite est croissante ;
- $u_{n+1} - u_n < 0$ alors elle est décroissante.

2) $\dfrac{\mathbf{u_{n+1}}}{\mathbf{u_n}}$ lorsque $u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, si :

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite est décroissante ;
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite est croissante.

Remarque

Il existe des suites qui ne sont ni croissantes , ni décroissantes. Par exemple : $u_n = (-1)^n$ définie sur $\mathbb{N}$.

IV - SUITE MAJORÉE, MINORÉE, BORNÉE

Définition

1. Une suite (u_n) est *majorée* lorsqu'il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$ pour tout entier n.
2. Une suite (u_n) est *minorée* lorsqu'il existe un réel m tel que $u_n \geqslant m$ pour tout entier n.
3. Une suite (u_n) est *bornée* lorsqu'elle est majorée et minorée.