Ce qu'il faut maîtriser

Ex. 1 — Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i - 5 + 3i$
2. $z_2 = (1 + 3i)(5 - i)$
3. $z_3 = (2 + i)^2$
4. $z_4 = 3(1 + 3i) - (4 + i)$

Ex. 2 — Donner la forme algébrique de : i^3, i^4, i^5 et i^6.

Ex. 3 — Donner les conjugués des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $i(2 - 5i)$
2. $\dfrac{1-i}{2i}$

Ex. 4 — Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1}{2-i}$
2. $\dfrac{1}{2i-5}$
3. $\dfrac{2-4i}{1+3i}$
4. $\dfrac{\sqrt{5}-i}{3-2i}$

Ex. 5 — Résoudre les équations suivantes et donner les solutions sous forme algébrique :

1. $iz - 1 = 7i$
2. $5i - z = 3iz + 1$
3. $2i + 3z = (1 + i)z + 1$
4. $(1 + i)\overline{z} = 1 - 3\overline{z}$
5. $2iz - 1 = \overline{z} + 4i$

Ex. 6 — Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + 1 = 0$
2. $16z^2 + 1 = 0$
3. $z^2 = -3$
4. $2z^2 - z + 1 = 0$
5. $4z^2 - 8z + 4 = 0$
6. $z^2 + 3z = -10$
7. $3z^2 + \sqrt{3}z = -1$

Ex. 7 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 - \overline{z} + 1 = 0$$

Ex. 8 — Donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $(1 + i)^5$ 2. $(1 + 2i)^4$ 3. $(2 + i)^4$

Ex. 9 — Soit k un nombre réel. On pose $z = k^2 + 2k - 1 - (k^2 - k - 2)i$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de k le nombre z est-il réel ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de k le nombre z est-il imaginaire pur ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de k le nombre z est-il nul ?

Ex. 10 — Pour tout complexe $z = x+iy$ différent de i, on associe le nombre $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$. Montrer que $Z = \overline{Z}$ si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Ex. 11 — Pour tout complexe $z \neq 3i - 5$, on pose $f(z) = \dfrac{z-3+i}{z+5-3i}$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = -\overline{f(\overline{z})}$.

Ex. 12 — Interprétation géométrique du conjugué.

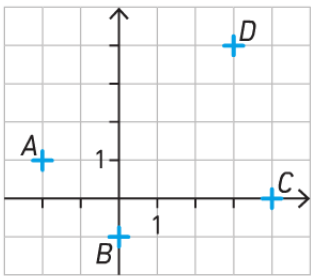
1. Dans le plan complexe, placer les points $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ dans les cas suivants :
   a) $z = 1 + i$
   b) $z = -2 + 3i$
   c) $z = -2i + 5$
2. Recopier et compléter l'énoncé suivant : "Dans le plan complexe, la point M d'affixe z et le point M' d'affixe $\overline{z}$ sont ...... par rapport à l'axe des ......".
3. Ne jamais l'oublier.

Ex. 13 — On considère les quatre points $A(-2 + i)$, $B(-2i)$, $C(5)$ et $D(3 + 3i)$.

1. Tracer un repère puis placer ces points dans le plan complexe.
2. Calculer les affixes de I, milieu de $[AC]$ et de J, milieu de $[BD]$.
3. Que peut-on en déduire quant au quadrilatère $ABCD$?

Ex. 14 —

1. Lire les affixes des points A, B, C et Dreprésentés dans le plan complexe ci-dessous.



2. Calculer les affixes des points I, J, K et L milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
3. Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Ex. 15 — On considère les quatre points $A(-4+7i)$, $B(-1 + i)$ et $C(1 - 3i)$.

1. Tracer un repère puis placer ces points dans le plan complexe.
2. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Que peut-on en déduire quant à la position des points A, B et C ?

Ex. 16 — Dans le plan complexe, on note E l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^2 + \overline{z}$ soit réel.

1. Chacun des points suivants appartiennent-ils à E ?
   1. $A\left(\frac{1}{2} + i\right)$ 2. $B\,(3 - 2i)$ 3. $C\,(5)$
2. Déterminer l'ensemble E.

Ex. 17 — Déterminer l'ensemble E des points M d'affixes z tels que $\dfrac{i}{z+1}$ soit un réel.

Objectif bac

Ex. 18 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(2z - 3i + 5)(2z^2 - 2z + 1) = 0$$

Ex. 19 — On considère l'équation (E) $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Montrer que z_0 est solution de (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de (E).

Ex. 20 — Dans le plan complexe, on donne les points $A(2 + i)$, $B(1 + 5i)$ et $D(5)$.

1. Calculer l'affixe du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Les points E et F vérifient :

$$\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$$

   a) Placer les points E et F.
   b) Calculer les affixes respectives des points E et F.
3. Les points C, E et F sont-ils alignés ?

Ex. 21 — Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère la fonction f qui, à tout nombre complexe z associe :

$$f(z) = z^2 + 2z + 9$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe sous forme algébrique.
   a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
   $$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$
   b) On note E l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que E est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Approfondissement

Ex. 22 — Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que $\dfrac{z - 4 + 3i}{z + 2 + i}$ soit réel puis imaginaire pur.

Ex. 23 — Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixes z alignés avec les points N et P d'affixes respectives iz et z^2.

Ex. 24 — z et z' sont deux nombres complexes tels que

$$z\overline{z} = z'\overline{z'} = 1 \text{ et } zz' \neq 1$$

Prouver que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.

Ex. 25 — On considère le polynôme P défini par

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$$

1. Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.
2. Déterminer le polynôme Q du second degré tel que pour tout complexe z, $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Ex. 26 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$$

sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.