Exercices

Démonstration par récurrence

1 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_n \leq 2$$

2 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 3 - 2^n$$

3 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2^{n+1} + 1$$

4 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{2}{2n + 1}$$

5 Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1^3 + \ldots + n^3 = (1 + \ldots + n)^2$$

6 **Inégalité de Bernoulli**
a est un réel strictement positif. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

7 Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_0 = 0,25$ et $v_{n+1} = 5v_n - 1$. Montrer que (v_n) est constante.

8 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

9 Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$v_n = n^2 + n - 1$$

10 Soit la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul par $w_1 = 2$ et $w_{n+1} = w_n - \dfrac{1}{n^2 + n}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$w_n = \frac{n+1}{n}$$

11 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

12 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

13 Démontrer que tout nombre entier $n \geq 24$ peut s'écrire sous la forme $n = 5a + 7b$ où a et b sont deux entiers.

14 On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = 5u_n + 8$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer par récurrence que $u_n = 3 \times 5^n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 2$ pour tout entier naturel n.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15 On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} v_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_n = \frac{n}{3^n}$$

2. Étudier la monotonie de la suite (v_n).

16 On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
3. En déduire que (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 3^n + n - 1$$