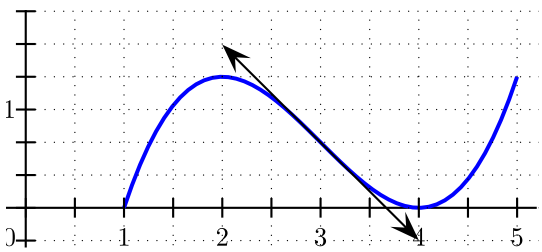
Exercices

Compléments sur la dérivation

1 On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+4x-7}{x-1}$. $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = -x+3-\dfrac{4}{x-1}$.
2. Δ est la droite d'équation $y = -x+3$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 puis tracer à la calculatrice la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ.
5. Peut-on trouver une tangente à $\mathcal{C}_f$ de coefficient directeur égal à -1 ?

2 On considère la fonction g définie sur $[1;5]$ dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



1. Que vaut $g'(3)$?

a) -3 b) -1 c) $\dfrac{3}{2}$ d) $-\dfrac{3}{2}$

2. $g'(x) = 0$ pour :

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=3$ d) $x=4$

3. La fonction g semble convexe sur :

a) $[2;4]$ b) $[1;3]$ c) $[1;2]$ d) $[3;5]$

4. g'' étant la dérivée de g', on a :

a) $g''(3)=3$ b) $g''(2)=0$ c) $g''(3)=0$ d) $g''(4)=0$

5. $g' \geqslant 0$ sur :

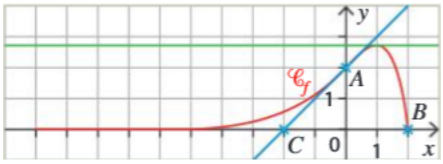
a) $[1;5]$ b) $[1;2]\cup[4;5]$ c) $[2;4]$ d) $[2;3[\cup]3;4]$

3 Une étude de fonction

Partie A - Lecture graphique

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10;2]$. On a placé les points $A(0;2)$, $B(2;0)$ et $C(-2;0)$.
On dispose des renseignements suivants :

- le point Bappartient à la courbe $\mathcal{C}_f$;
- la droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$;
- la tangente à la courbe $\mathbf{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



Par lecture graphique, donner :

1. Les valeurs de $f(0)$ et $f(2)$.
2. La valeur de $f'(1)$.
3. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.
4. Les variations de f sur $[-10;2]$.
5. L'intervalle sur lequel f est concave puis celui où elle est convexe.

Partie B - Par le calcul

f est désormais la fonction définie sur $[-10;2]$ par $f(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^x$.

1. (a) Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
   (b) Déterminer f'.
   (c) En déduire $f'(1)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier les variations de f sur $[-10;2]$.
4. (a) Déterminer f".
   (b) Étudier la convexité de f sur $[-10;2]$.

4 Lorsque a queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours. Lors de la repousse, on modélise la longueur, en centimètres, de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.

Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 10\,\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $u(x) = -\,\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a $f'(x) = -u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$. En déduire les variations de f sur cet intervalle.
2. (a) Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours.
   (b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?
3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance est donnée par f' et on admet que $f''(x) = \dfrac{1}{10}u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}(1+u(x))$.
   (a) Déterminer les variations de f' sur $[0;+\infty[$.
   (b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de a longueur de la queue du lézard est maximale.