Échauffement

Compléments sur la dérivation

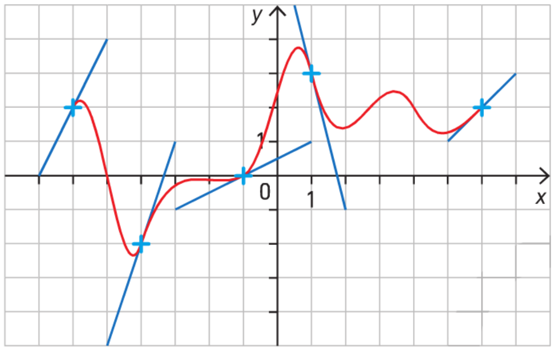
Calcul de dérivées

1 Dériver les fonctions suivantes

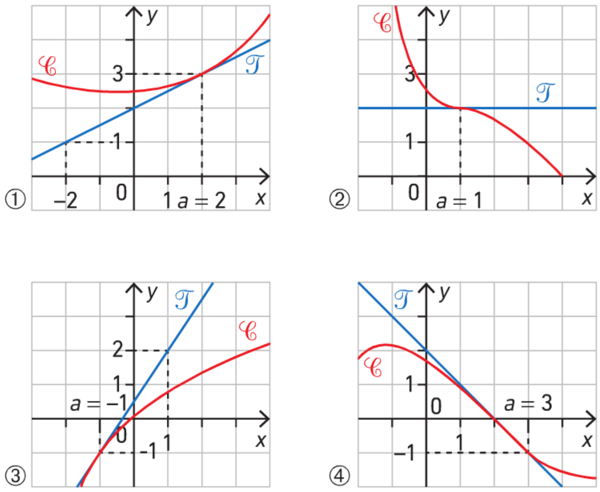
1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = 3x$
3. $f(x) = -6x$
4. $f(x) = 9x - 10$
5. $f(x) = 100 - 1,2x$
6. $f(x) = x^2$
7. $f(x) = x^3$
8. $f(x) = x^4$
9. $f(x) = x^{10}$
10. $f(x) = x^{102}$
11. $f(x) = 2x^2 + 7$
12. $f(x) = -5x^2 + 6x$
13. $f(x) = 10x^3 - 12x^2 + x - \pi$
14. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 51 + \frac{5}{3}x^3$
15. $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{3}$
16. $f(x) = \frac{1}{x}$
17. $f(x) = \sqrt{x}$
18. $f(x) = \frac{-2}{x}$
19. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5x^2$
20. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
21. $f(x) = \frac{1}{x} - 6\sqrt{x}$
22. $f(x) = 5x^3 - \frac{1}{x}$
23. $f(x) = \frac{5}{2}x^4 - \frac{9}{x}$
24. $f(x) = 3x^{11} + x - 2 + \frac{1}{x} - 8\sqrt{x}$
25. $f(x) = x(x^2 + 6)$
26. $f(x) = (2x + 1)(-x - 3)$
27. $f(x) = 5x^2(-6x + 2)$
28. $f(x) = \sqrt{x}(-x^2 + x)$
29. $f(x) = 2\sqrt{x}(3 - x)$
30. $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - 1)$
31. $f(x) = (\frac{2}{x} - 1)(x + 2)$
32. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$
33. $f(x) = \frac{-2}{x^2 - 1}$
34. $f(x) = \frac{x + 5}{2x - 1}$
35. $f(x) = \frac{5\sqrt{x}}{7 - 3x}$
36. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 7}{x + 5}$
37. $f(x) = \frac{x^2}{x}$
38. $f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2} + 7\sqrt{x}$

Équation de tangente

2 La fonction f définie sur l'intervalle $[-6; 6]$ est représentée par la courbe ci-dessous. Lire les nombres dérivés de la fonction f qui se déduisent des tangentes tracées.



3 Dans chacun des cas suivants, on a tracé la courbe d'une fonction f et se tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a. Lire, dans chaque cas, la valeur de a, de $f(a)$ et de $f'(a)$ puis donner l'équation de $\mathcal{T}$.



4 Une équation de tangente

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3$.
2. Visualiser à l'aide de la calculatrice la courbe de la fonction f et sa tangente au point d'abscisse 1.

5 Une autre équation de tangente.

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction g au point d'abscisse -3 définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$.
2. Vérifier les résultats à la calculatrice.

Composée de fonctions

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer $u \circ v$ puis $v \circ u$ en précisant à chaque fois l'ensemble de définition.

1. $u : x \mapsto 5x + 3$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

2. $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

3. $u : x \mapsto x^3 - 1$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

4. $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

7 Exercice inverse du précédent, décomposer chaque fonction sous la forme $u \circ v$.

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x - 6}$ définie sur $[3; +\infty[$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x - 7}$ définie sur $]-\infty; 7[\cup]7; +\infty[$.
3. $h : x \mapsto \mathrm{e}^{3x-5}$ définie sur $\mathbb{R}$.
4. $k : x \mapsto 3\,\mathrm{e}^x - 5$ définie sur $\mathbb{R}$.
5. $m : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
6. $p : x \mapsto |x^2 - 1|$ définie sur $\mathbb{R}$.

8 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \left(x^2 + 5\right)^3$
2. $f(x) = \left(x^2 + 5\right)^{-3}$
3. $f(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right)^4$
4. $f(x) = (1 - 3x)^{10}$
5. $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$
6. $f(x) = \sqrt{7x^2 - 1}$
7. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$
8. $f(x) = \sqrt{6x^4 + 3}$

9 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes

1. $f(x) = \left(\dfrac{x - 1}{5}\right)^3$
2. $f(x) = \left(\dfrac{3 - x}{3 + x^2}\right)^2$
3. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$
6. $f(x) = \mathrm{e}^{x-4}$
7. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$
10. $f(x) = (x + 3)\sqrt{x + 3}$
11. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{x^2-1}$
12. $f(x) = \sqrt{(1 + 3x)^3}$

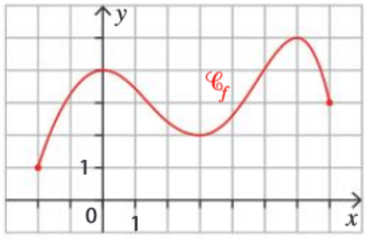
Variation de fonctions

10 Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $f_1(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$
3. $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$
4. $k(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}$

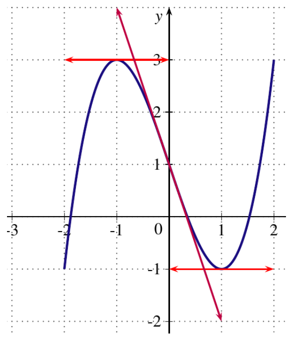
Convexité

11 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2; 7]$ dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement la convexité de f et préciser les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

12 On considère une fonction f définie sur $[-2; 2]$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.



1. Donner les valeurs de : $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Que se passe-t-il au point d'abscisse $x = 0$? Justifier.

13 Dans chacun des cas, f est deux fois dérivables sur son ensemble de définition. Calculer f''.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$
2. $f(x) = 3x^2 - 7x$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{3x^2+2}$
5. $f(x) = x^3 + \mathrm{e}^x$
6. $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$
7. $f(x) = \mathrm{e}^{x^3-5}$
8. $f(x) = e^{2x+1}$
9. $f(x) = e^{-x^2}$
10. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

14 Étudier la convexité des fonctions des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition, et préciser les points d'inflexion éventuels.

1. $f(x) = x^{10}$
2. $g(x) = x^3 - x^2 + x + 1$
3. $h(x) = \dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$
4. $k(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2}$
5. $p(x) = -(x + 1)^2\,\mathrm{e}^x$
6. $q(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3$