Échauffement

Démonstration par récurrence

1 Calculer les premiers termes puis étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = -3n + 1$
2. $u_n = \dfrac{n+2}{5}$
3. $u_n = n^2 + 2n$
4. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$
5. $u_n = \dfrac{2^n}{7^{n+1}}$
6. $u_n = \dfrac{3^{n+2}}{3^n}$
7. $u_n = (n+1)^2$
8. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{n}$
9. $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \dfrac{3}{v_n}$

2 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison -2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis calculer u_{25}.

3 Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

1. $v_n = 3n - 2$
2. $w_n = n^2 + 1$
3. $a_n = \dfrac{n^2 + n}{n}$

4 Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{8}$ et de raison 2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis calculer u_6.

5 Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

1. $v_n = n^2 + 1$
2. $w_n = 2^{n+1}$
3. $a_n = \dfrac{1}{n}$

6 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On pose $v_n = u_n - 2$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

7 Un groupe d'enfants décide de construire une tour en briques.

La tour a initialement une hauteur de 40 cm. Chaque enfant rajoute à la tour un étage de 2 cm.
On note u_n la hauteur de la tour en cm après le passage de n enfants.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Quelle est la hauteur de la tour après le passage de 15 enfants ?
5. Combien faut-il de passages pour que la tour mesure 1 m ?

8 Démontrer le théorème suivant :

Une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est croissante si et seulement si $r \geq 0$.

Et pour les suites géométriques ?

9 On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. Montrer que $u_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier $n \geq 1$.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

10 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2^n - 1$$

11 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$v_n = n(n+1)$$

12 (u_n) est la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6$. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leq 1$$

13 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \geq n + 1$$