Chapitre III

Dénombrement

I Principes additifs et multiplicatifs

Définition : Cardinal d'un ensemble

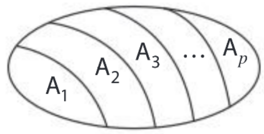
Soit n un entier naturel. Un ensemble E à n éléments est dit **fini**. Son nombre d'éléments est appelé **cardinal**, noté Card(E).

Exemples

— $E = \{-1; 4; 10; -6\}$ est un ensemble fini à 4 éléments et $\text{Card}(E) = 4$.
— $\mathbb{N}$ et $[-1; 1]$ ne sont pas des ensembles finis.

Propriété : Principe additif

Soit p un nombre entier naturel et A_1, A_2, ..., A_p, p ensembles finis deux à deux disjoints. Alors :



$$\text{Card}\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p) = \text{Card}\,(A_1) + \text{Card}\,(A_2) + \ldots + \text{Card}\,(A_p)$$

Définition : Produit cartésien

1. Soit E et F deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** de E et de F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

2. Soit n un entier naturel et E_1, E_2, ..., E_n des ensembles non vides. Les éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ sont les **n-uplets** de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_k \in E_k$ pour tout entier k compris entre 1 et n.

3. Soit E un ensemble non vide. Les éléments du produit cartésien $E^n = \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n\text{ facteurs}}$ sont les n-uplets d'éléments de E.

Exemple

— $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{0; 1\}$. Alors $E \times F = \{(a; 0); (b; 0); (c; 0); (a; 1); (b; 1); (c; 1)\}$.
— $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, aussi noté $\mathbb{R}^2$, est l'ensemble des couples de réels. Les coordonnées d'un point du plan sont des 2-uplets de nombres réels.

Propriété : Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles finis non vides. Alors

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

Plus généralement, si n est un entier naturel et E_1, E_2, ..., E_n des ensembles finis non vides, alors

$$\text{Card}(E_1 \times \ldots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \ldots \times \text{Card}(E_n)$$

Et en particulier si E est un ensemble fini non vide et n un entier naturel, alors

$$\text{Card}\,(E^n) = \text{Card}(E) \times \ldots \times \text{Card}(E) = \text{Card}(E)^n$$

II Arrangements et permutations

A Définition

Définition : Arrangement et permutation d'un ensemble

Soit n un entier naturel non nul, k un entier naturel inférieur à n et E un ensemble de cardinal n. Un **arrangement** de k éléments de E est un k-uplet d'éléments **distincts** de E.

Une **permutation** de E est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ alors $(2; 3; 5)$ et $(4; 2; 1)$ sont des arrangements de trois éléments de E. Les éléments $(1; 3; 2; 4; 5)$ et $(2; 3; 4; 5; 1)$ sont des permutations de E.

B La factorielle

Définition : Factorielle d'un nombre entier

On appelle **factorielle** n le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.
On le note $n!$ et on a : $n! = n \times (n-1) \times 2 \ldots \times 1$

Remarque

Par convention $0! = 1$.

C Dénombrement

Propriété : Nombre d'arrangements et nombre de permutations

Soit un entier naturel n, un entier k inférieur ou égal à n et E un ensemble de cardinal n.

1. Le nombre d'arrangements de k éléments de E, noté $\mathscr{A}_n^k$, est égal à $\mathscr{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
2. Le nombre de permutations de E est $n!$.

III Parties d'un ensemble et combinaisons

Définition : Parties et combinaisons d'un ensemble

Une **partie** d'un ensemble E est un **sous-ensemble** de E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Soit un entier naturel n, un entier k inférieur ou égal à n et E un ensemble fini à n éléments. Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E de cardinal k. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\dbinom{n}{k}$.

Exemple

- Si $F = \{0; 1\}$ alors $\mathscr{P}(F) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{0; 1\}\}$.
- Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$.

Propriété : Nombre de combinaisons d'un ensemble

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble de cardinal n.
Le nombre de combinaison de k éléments de E, noté $\binom{n}{k}$ est donné par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Propriété :

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Propriété : Relation du *triangle de Pascal*

Soit $n \geqslant 2$ un entier et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\ &= \frac{(n-1)! \times {\color{red}k}}{(n-k)!(k-1)! \times {\color{red}k}} + \frac{(n-1)! \times {\color{red}(n-k)}}{(n-1-k)! \times {\color{red}(n-k)} \times k!} \\ &= \frac{(n-1)! \times k + (n-1)! \times (n-k)}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Le triangle de Pascal :

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On peut retrouver les valeurs des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal.
On remplit le tableau en utilisant la relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
À l'intersection de la ligne n et de la colonne k on lit le coefficient $\binom{n}{k}$

Propriété : Somme de coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Propriété : Nombre de sous-ensembles

Soit un entier naturel n, et E un ensemble de cardinal n.

Le nombre de parties de E, autrement dit le cardinal de $\mathscr{P}(E)$, est égal à 2^n.