Ex. 1 — Démontrer que la somme de deux entiers de même parité est paire.

Ex. 2 — Démontrer que la somme de quatre entiers consécutifs est un multiple de 2.

Ex. 3 — Démontrer que si un entier est un multiple de 36 alors c'est un multiple de 9. La réciproque est-elle vraie ?

Ex. 4 — n est un entier naturel. Montrer par **disjonction des cas** que $n(n^2 + 5)$ est pair.

Ex. 5 —
1. Montrer que si n est impair, 8 divise $n^2 - 1$.
2. Montrer que si n est pair, n^2 est multiple de 4.
3. En déduire que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

Ex. 6 — On cherche pour quelles valeurs de l'entier naturel n la fraction $\dfrac{n+8}{2n-5}$ est un entier relatif.

1. **Condition nécessaire.** On suppose que n est tel que qu'il existe un entier relatif k tel que $k = \dfrac{n+8}{2n-5}$.
   a) Montrer alors que $2n-5$ divise $2n+16$.
   b) En déduire que $2n - 5$ divise 21.
   c) Déterminer alors l'ensemble E des valeurs possibles pour n.
2. **Condition suffisante.** Toutes les valeurs de E conviennent-elles ?

Ex. 7 — Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n + 3$ divise 10.

Ex. 8 — Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $n + 7$.

Ex. 9 — Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $(x - 3)(y + 5) = 6$.

Ex. 10 — Démontrer **par récurrence** que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Ex. 11 — Montrer que pour tout entier naturel n, $5^{2n} + 3$ est divisible par 4.

Ex. 12 —
1. Déterminer tous les diviseurs de 56.
2. Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n + 70$ et $b = n + 7$. Quelle valeur doit prendre n pour que b soit diviseur de a ?

Ex. 13 — On considère l'équation (E) d'inconnues (x, y) entiers naturels : $x^2 - 2y^2 = 1$.
Soit (x, y) un couple solution. Montrer que :
1. x est impair et y est pair.
2. x et y n'ont aucun diviseur commun.
3. $(3x + 4y, 2x + 3y)$ est encore un couple solution.
   Déterminer alors un couple d'entiers solution supérieurs à 1000.

Ex. 14 — n est un entier naturel.
Déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $4n + 27$ par $n + 5$.

Ex. 15 — n est un entier naturel.
Déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $9n + 17$ par $2n + 3$.

Ex. 16 — Soient n et $p \geq 2$ deux entiers relatifs.

1. Montrer que le produit $n(n+1)$ est toujours pair.
2. Montrer que le produit de trois nombres consécutifs est toujours divisible par 3.
3. Montrer que le produit de p nombres consécutifs est toujours divisible par p, pour tout nombre naturel p.

Ex. 17 —
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, 7 divise $2^{3n} - 1$.
   En déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances successives de 2.
3. Pour tout entier p, on considère le nombre :
$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$
   a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
   b) Démontrer que, si $p = 3n+1$, alors A_p est divisible par 7.
   c) Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

Ex. 18 — Vrai ou faux ?
1. a) $132 \equiv 42\,[15]$; b) $1214 \equiv -8\,[44]$; c) $-209 \equiv 131\,[28]$; d) $899 \equiv 1\,[45]$.

2. Si un entier naturel n est congru modulo 5 à un entier naturel r alors r est la reste de la division euclidienne de n par 5.
3. Si $a \equiv 3\,[7]$ et $b \equiv 5\,[7]$ alors $3a+8b \equiv 0\,[7]$.

Ex. 19 — Déterminer les restes dans la division euclidienne par 7 des nombres :
a) 99 b) 50^{100} c) 100^3 d) $50^{100}+99^{100}$
e) $421^{120}\times 99^{15}$

Ex. 20 — Montrer, sans calculatrice et sans calcul, que :
a) 14 divise $16^{31}-2^{31}$ b) 11 divise $13^{20}-9^{20}$

Ex. 21 — Déterminer le reste de la division euclidienne de 23^{41} par 7.

Ex. 22 — Déterminer selon les valeurs de l'entier relatif n, le reste de la division euclidienne de n^2 par 7.
En déduire les solutions de l'équation $x^2 \equiv 2\,[7]$.

Ex. 23 — Déterminer l'ensemble des entiers x tels que :
a) $x+3 \equiv -1\,[7]$ b) $7x \equiv 3\,[11]$

Ex. 24 — On considère l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$: $2x^2+3y^2=16$.
1. Montrer que si un couple d'entiers relatifs (x,y) est solution de (E), alors $2x^2 \equiv 1\,[3]$.
2. Déterminer alors les restes de la division de $2x^2$ par 3 et conclure.

Ex. 25 —
1. Montrer que pour tout entier naturel k, $7^{4k} \equiv 1\,[5]$.
2. En déduire que $7^{4k+1} \equiv 2\,[5]$, $7^{4k+2} \equiv -1\,[5]$ et $7^{4k+3} \equiv -2\,[5]$.
3. En déduire les différents restes possibles de la division euclidienne de 7^n par 5.

Ex. 26 — Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que $3\,|\,n(n^2+5)$.

Ex. 27 — Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que $6\,|\,n(2n+1)(7n+1)$.

Ex. 28 — Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n^3+23n+2016$ est multiple de 6.

Ex. 29 — Pour quelles valeurs de n, $55^n+56^n+57^n$ est-il divisible par 7 ?

Ex. 30 — Critère de divisibilité par 3.
Démontrer qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. 31 — Critère de divisibilité par 7.
Soit n un entier naturel qui s'écrit $n=10a+b$ où a et b sont des entiers naturels.
1. Un nombre n est divisible par 7 si et seulement si $a-2b$ est divisible par 7. Montrer que les nombres 532, 987 et 25718 sont divisibles par 7.
2. Démontrer ce critère de divisibilité.

Ex. 32 — On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=2013^2-1$ et $u_{n+1}=(u_n+1)^5-1$.
Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est divisible par 4.

Ex. 33 — En étudiant les congruences modulo 5, démontrer que, si les entiers x, y et z sont tels que $x^2+y^2=z^2$, alors l'un au moins est divisible par 5.

Ex. 34 — On considère l'équation (E) : $11x^2-7y^2=5$, où x et y sont des entiers relatifs.
1. Démontrer que si le couple $(x;y)$ est solution de (E), alors $x^2 \equiv 2y^2\,[5]$.
2. En déduire que si le couple $(x;y)$ est solution (E), alors x et y sont des multiples de 5.

Ex. 35 — On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0=14$ et $u_{n+1}=5u_n-6$ pour $n\in\mathbb{N}$.
1. Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n\,[4]$. En déduire que que, pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2\,[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\,[4]$.
3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2u_n=5^{n+2}+3$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $2u_n \equiv 28\,[100]$.
4. Valider la conjecture émise en 1.

Ex. 36 —
1. En remarquant que $2 \equiv -1\,[3]$, montre que 3 ne divise pas $2^{33}-1$.
2. On considère l'équation (F) : $11x^2-2y^2=5$ où x et y sont deux entiers relatifs. Démontrer que si le couple $(x;y)$ est solution de (F) alors $2x^2 \equiv 2y^2\,[5]$.