Échauffement

Chapitre III - Dénombrement

1 Dans une classe de 35 élèves, 20 étudient l'allemand, 15 l'espagnol et 8 aucune de ces deux langues.
Combien d'élèves étudient l'allemand et l'espagnol ?

2 Soit A et B deux ensembles finis tels que $\text{Card}(A) = 27$, $\text{Card}(B) = 15$ et $\text{Card}(A \cup B) = 35$.
Les ensembles A et B sont-ils disjoints ?

3 Soit A et B deux ensembles finis disjoints tels que $\text{Card}(A) = 7$ et $\text{Card}(B) = 9$. Caculer $\text{Card}(A \cup B)$ et $\text{Card}(A \times B)$.

4 Soit les ensembles $A = \{3; 2; 1\}$ et $B = \{0; 3\}$. Déterminer $A \times B$, $B \times A$ et calculer leur cardinaux respectifs.

5 Soit l'ensemble

$$C = \{(6; 2); (6; 4); (5; 2); (5; 4); (10; 2); (10; 4); (3; 2); (3; 4)\}$$

Écrire C sous la forme d'un produit cartésien de deux ensembles.

6 Soit les ensembles $E = \{a\}$, $F = \{b; d\}$ et $G = \{a; b; d\}$. Déterminer $G \times E \times F$.

7 Soit l'ensemble $A = \{2; 4; 6; 8\}$. Déterminer l'ensemble B, disjoint de A, tel que $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

8 Donner les triplets (ou 3-uplets) de l'ensemble $E = \{a; b\}$.

9 Combien de mots (ayant un sens ou non) de 3 lettres peut-on former à l'aide des lettres A, E, I, O et U ?

10 Une grille est quadrillée avec 60 carreaux rectangulaires. On colorie chaque carreau en rouge, vert ou bleu.
Combien de grilles différentes peut-on ainsi réaliser ?

11 Une compétition de jeux vidéo en ligne oppose six joueurs. Un classement est établi à la fin et il n'y a pas d'ex æquo. Le meilleur joueur reçoit une médaille d'or, le deuxième une médaille d'argent et le troisième une médaille de bronze.
Combien y a-t-il de podiums possibles ?

12 Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) de sept lettres distinctes avec les lettres du mot PRODUIT ?
Parmi ces mots, combien commencent par une voyelle ?

13 On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4\}$.

1. Déterminer toutes les parties de l'ensemble E.
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties de E ?
3. Déterminer le nombre de parties de E à deux éléments.

14 Dans un jeu de cartes, une "main" est constituée de cinq cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent le valet de pique ?

15 Aux élections présidentielles de 2017, onze candidats se sont présentés au premier tour. Si on avait dû organiser un débat entre chaque paire de candidats, combien de débats différents auraient eu lieu ?

16
Simplifier :

1. $\dfrac{6!}{3!}$
2. $\dfrac{9!}{11!}$
3. $\dfrac{20!}{15! \times 2! \times 5!}$
4. $\dfrac{n!}{(n-2)!}$, $n \geq 2$
5. $\dfrac{(n-1)!}{(n+2)!}$, $n \geq 1$
6. $\dfrac{n!}{n} - (n-1)!$, $n \geq 1$
7. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$, $n \geq 1$

17
Une famille est composée de quatre enfants.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. En tenant compte de l'ordre des naissances, combien de compositions obtient-on ?
3. À l'aide de l'arbre, dénombrer le nombre de compositions avec :
   (a) une fille et trois garçons ;
   (b) deux filles et deux garçons ;
   (c) Quatre filles.
4. Exprimer chacun des nombres précédents à l'aide d'une combinaison $\binom{n}{k}$.

18
Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.
Démontrer que :

$$n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$$

19 Binôme de Newton

1. Soient a et b des nombres réels. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
2. En déduire le résultat du cours $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Démontrer en utilisant le binôme de Newton que pour tout entier non nul n, $\left(3+\sqrt{7}\right)^n + \left(3-\sqrt{7}\right)^n$ est un nombre entier.

20 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dbinom{2n}{n}$.
Montrer que la suite u_n est strictement croissante.