Chapitre IV

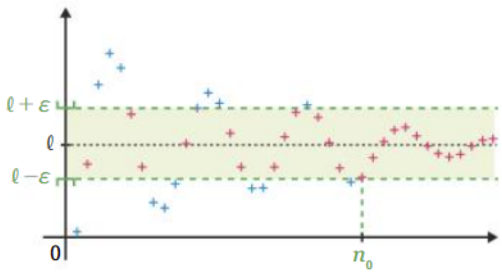
Limites de suites

I Limite de suites

A Suite convergente.

Définition

On dit qu'une suite converge (ou admet une limite finie) lorsqu'il existe un réel l tel que tout intervalle ouvert I contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang i.e :
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$



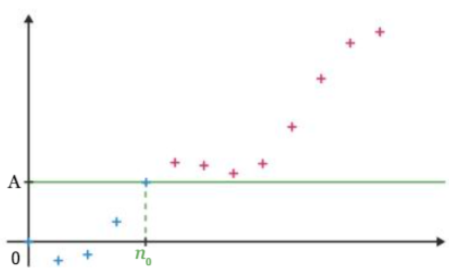
B Suite divergente

Il y a deux cas pour qu'une suite soit divergente : soit elle n'a pas de limite, soit sa limite est infinie.

Suite divergente vers $+\infty$

Définition

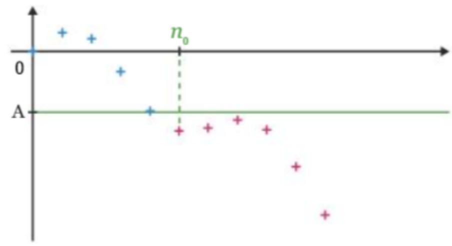
On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ lorsque : tout intervalle ouvert du type $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Ou encore : pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N tel que : $n \geqslant N \Rightarrow u_n > A$



Suite divergente vers $-\infty$

Définition

On dit qu'une suite diverge vers $-\infty$ lorsque : tout intervalle ouvert du type $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Ou encore : pour tout $A \in \mathbb{R}_-^*$, il existe un rang N tel que : $n \geqslant N \Rightarrow u_n < A$



Remarque

Certaines suites n'ont pas de limite, par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)$ n'a pas de limite.

C Limites des suites usuelles

Propriété

On a les limites des suites suivantes :

— $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ — $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ — $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ — $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

D Limite et opérations

Somme de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$l_1 \times l_2$	∞	∞	FI

Quotient de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l_1	l_1	∞	l_1	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l_2 \neq 0$	∞	l_2	0	0	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l_1}{l_2}$	0	∞	∞	∞	FI	FI

Remarque

Retenons ces quatre formes indéterminées :

$+\infty - \infty$ $\quad \infty \times 0$ $\quad \dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad \dfrac{0}{0}$

E Limites des suites géométriques

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$. Alors :

1. si $q \leq -1$ la suite n'a pas de limite.
2. si $-1 < q < 1$ la suite converge vers 0.
3. si $q = 1$ la suite converge vers 1 et est constante.
4. si $q > 1$ la suite diverge et tend vers $+\infty$.

II Théorèmes de convergence

A Comparaison par rapport à une suite divergente

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : a partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$

1. Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) aussi .
2. Si (v_n) diverge vers -∞ alors (u_n) aussi .

B Théorème d'encadrement : théorème des gendarmes

Théorème

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

1. À partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
2. (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l .

Alors (v_n) converge aussi vers l .

C Passage à la limite dans une inégalité

Théorème

(u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que à partir d'un certain certain rang $u_n \leqslant v_n$ ou bien $u_n < v_n$ alors :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. (*Les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite*).

D Théorèmes liés aux suites monotones

1) Suites monotones non bornées.

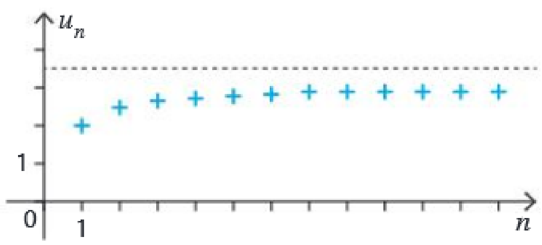
Théorème

1. Si (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. Si (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

2) Théorème de la convergence monotone

Théorème

Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.



Remarque

Attention ce théorème ne donne pas la limite de la suite. *Un majorant (ou un minorant) n'est pas forcément cette limite*