# Entraînement

## Exercice 1

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage un protocole de traitement d'une maladie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ce protocole, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Le protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqure intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminée.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de $30\,\%$ par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite $(u_n)$ où, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la $n$-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité $u_1$, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de $\ell$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = 6 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de $n$, puis de $u_n$ en fonction de $n$.
   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisables en appliquant ce protocole.

## Exercice 2

Dans une ville il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

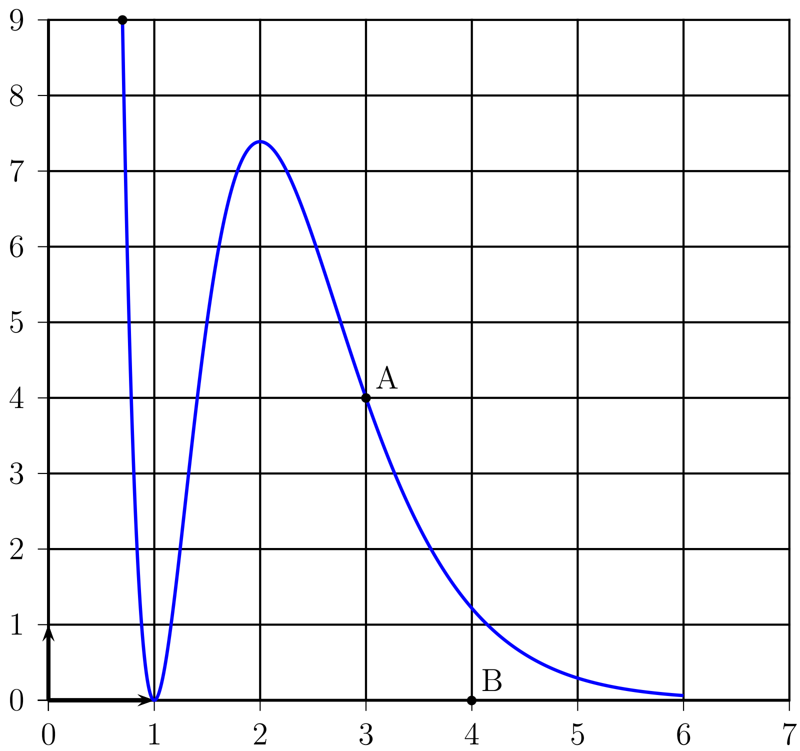
1. Déterminer le nombre de façon d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?
2. Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

## Exercice 3

Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$ ; on suppose que $f$ est dérivable.

**PARTIE A : Etude graphique**

On a représenté la fonction $f$ sur le graphique ci-dessous.




1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de $f$ passe par les points A$(3\,;\,4)$ et B$(4\,;\,0)$. Déterminer $f'(3)$.
2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de $f'$ sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$ .

**PARTIE B : Etude théorique**

On admet que la fonction $f$ est définie par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{e}^{-2x+6}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right) \mathrm{e}^{-2x+6}$ , où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0{,}7\,;6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$.
3. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisées sans être démontrées.

| | |
|---|---|
| L1 | $f'(x) := (-2x\hat{}2 + 6x - 4) * \mathrm{e}\hat{}(-2x+6)$<br>$\rightarrow f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right) \mathrm{e}^{-2x+6}$ |
| L2 | $g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$<br>$\rightarrow g(x) = -16x\mathrm{e}^{-2x+6} + 4x^2\mathrm{e}^{-2x+6} + 14\mathrm{e}^{-2x+6}$ |
| L3 | Factoriser$[g(x)]$<br>$\rightarrow 2\mathrm{e}^{-2x+6}\left(2x^2 - 8x + 7\right)$ |
| L4 | Résoudre$[g(x) = 0]$<br>$\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}\ ;\ x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$ |

   (a) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f$ est concave.

   (b) La courbe représentative de la fonction $f$ admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.