**Ex. 1** — Déterminer la dimension de chacune des matrices suivantes, où un point représente un nombre.

$$A=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

Quels produits peut-on effectuer avec deux matrices ?

**Ex. 2** — Calculer les produits suivants à la main.

1. $\begin{pmatrix}1&4\\-10&5\\3&6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}4&5\\-2&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6&8\\3&9\end{pmatrix}$.

**Ex. 3** —

$$A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\-10&10&-10\\2&4&5\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}2&1&4\\-2&2&-3\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

1. Sans calculatrice, déterminer :
   a) $A-B$
   b) $2A+3B$
   c) $A\times B$
2. Vérifier les résultats à la calculatrice.

**Ex. 4** — $A=\begin{pmatrix}3&4\\-5&x\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$.
2. Déterminer la valeur de $x$ pour que $A^2=\begin{pmatrix}-11&12\\-15&-20\end{pmatrix}$.

**Ex. 5** — Soit $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^3=A^2$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $A^n=A^2$.

**Ex. 6** — Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3 $N$ telle que $A=I+N$.
2. Montrer que $N^3=0_3$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq 1$,

$$A^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2$$

**Ex. 7** — Montrer que les matrices $A$ et $B$ suivantes sont inverses l'une de l'autre.

1. $A=\begin{pmatrix}5&-1\\-9&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&1\\9&5\end{pmatrix}$.
2. $A=\begin{pmatrix}-3&-5&5\\2&3&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&5&0\\1&2&1\\3&5&1\end{pmatrix}$.

**Ex. 8** — On considère $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2-3A+2I=0_3$.
2. En déduire sans calculatrice que $A$ est inversible et déterminer son inverse.

**Ex. 9** — Soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2=2A+I_2$.
2. En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$.

**Ex. 10** — On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que $AB=AC$.
2. En déduire que la matrice $A$ n'est pas inversible.

**Ex. 11** — Pour repeindre la pièce principale de son appartement, Frédéric a utilisé 3 pots de peinture blanche et 4 pots de peinture de couleur pour un total de 202 euros.
Pour les pièces annexes, il a utilisé 5 pots de peinture blanche et 7 pots de peinture de couleur pour un total de 347,50 euros.

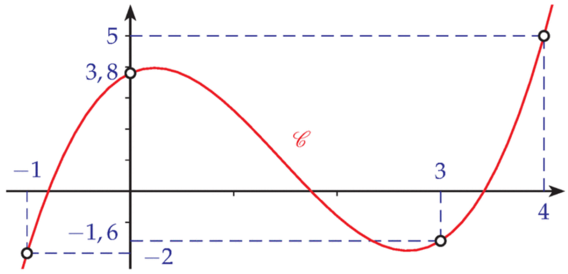
On note $x$ le prix d'un pot de peinture blanche et $y$ le prix d'un pot de peinture de couleur.

1. Donner le système d'équations $(S)$ d'inconnues $x$ et $y$ correspondant au problème.
2. Déterminer les matrices $A$, $X$ et $B$ telles que $(S)$ soit équivalent à l'équation matricielle $AX=B$.
3. Déterminer $X$ à la calculatrice puis en déduire le prix d'un pot de peinture blanche et le prix d'un pot de peinture de couleur.

**Ex. 12** — Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases}6x-4y=7\\7x-5y=8\end{cases}\qquad\begin{cases}4x-2y+z=7\\x-y+z=9\\-x+5y+2z=-10\end{cases}$$

**Ex. 13** — Soit la fonction polynôme de degré 3 définie par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ représentée ci-dessous :



On cherche à déterminer les coefficients $a$, $b$, $c$ et $d$.

1. Lire sur le graphique la valeur $f(-1)$. En déduire une équation vérifiée par $a$, $b$, $c$ et $d$.
2. Établir un système d'équations vérifiées par ces quatre coefficients.
3. Établir l'équation matricielle associée ; la résoudre puis donner l'expression de la fonction $f$.

**Ex. 14** — Soient $A$ et $B$ deux matrices inversibles et $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

1. Prouver que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Prouver que $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

**Ex. 15** — Intersection de plans

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = 4A - A^2$.

1. Calculer $B$ puis vérifier que $AB = 10I_3$.
2. Montrer que $B = A(4I_3 - A)$.
3. Montrer que $A^2(4I_3 - A) = 10I_3$.
4. En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.
5. Dans un repère orthonormé de l'espace, soient trois plans et leurs équations :
   - $\mathcal{P} : 2x - y + 3z = 1$
   - $\mathcal{Q} : -3x + y - z = 2$
   - $\mathcal{R} : x + y + z = 3$

Déterminer les coordonnées de l'intersection de ces trois plans à l'aide de la matrice $B$.

**Ex. 16** — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de $A^3$ et une expression de $A^4$ sous la forme $\alpha A + \beta I$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels.
3. On considère les suites $(r_n)$ et $(s_n)$ définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$A^n = r_nA + s_nI$$

4. a) Démontrer que la suite $(k_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison $-1$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel $n$, une expression de $k_n$ en fonction de $n$.
5. On admet que la suite $(t_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2. En déduire une expression explicite de $t_n$ en fonction de $n$ pour tout entier $n$.
6. En déduire alors, pour tout entier naturel $n$, une expression des coefficients de la matrice $A^n$.

**Ex. 17** — On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On souhaite calculer $A^n$ pour tout entier $n$.

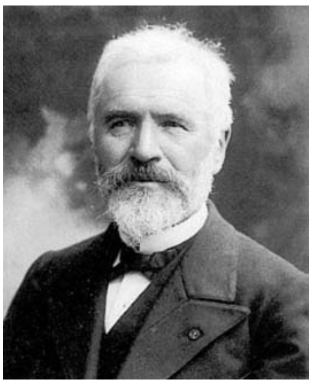
1. À l'aide de la calculatrice, calculer les premières puissances de $A$. Quelle forme particulière remarque-t-on pour ces matrices ?
2. a) Écrire $A$ sous la forme $A = 2B - I_3$, où $B$ est une matrice à préciser.
   b) Montrer que $B^2 = 3B$.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$A^n = (-1)^nI_3 + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)B.$$

3. Écrire $A^n$ avec tous ses coefficients en fonction de $n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Ex. 18** — Déterminer une fonction polynôme $f$ telle que pour tout réel $x$, on ait :

$$(x^2-2)f''(x)+(1-3x)f'(x)+f(x) = x^3+6x^2-2x+4$$



*Camille Jordan, 1838-1922*