Exercices

# Limites de suites

**1** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2015$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2. Que peut-on en déduire ?

**2** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$, par :
$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}.$$
2. Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 3.
3. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**3** Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite $(u_n)$ approchées à $10^{-2}$ près :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2 | | | | | | | | |

   (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite $(u_n)$.

2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ non nul on a
$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

3. Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite $(v_n)$.

   (b) En déduire, que pour tout entier naturel $n$,
$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$

**4**

**Partie A**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel $n$ par $u_{n+1} = 0,9u_n + 60$.

1. (a) Calculer $u_1$ et $u_2$.

   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, on a l'inégalité
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600.$$
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :
    n=0
    u=400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

   Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : mystere (500) ?

**Partie B**

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres. Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres. Le verger compte 400 arbres en 2023.

L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir. Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

**5**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$, où $n$ désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club $A$.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2. Pour tout entier naturel $n$, déterminer une relation liant $a_n$ et $b_n$.

3. Montrer que la suite $(a_n)$ vérifie la relation suivante pour tout entier naturel $n$, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700.$$

   (b) En déduire que la suite $(a_n)$ converge.

5. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = a_n - 1\,200$.

   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.

   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$.

6. (a) Déterminer la limite de la suite $(a_n)$.

   (b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

7. (a) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def  seuil() :
     n = 0
     A = 1 700
     while ... :
          n=n+1
          A = ...
     return
```

   (b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

**6** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ **sont strictement positives**.

1. (a) Calculez $u_1$ et $v_1$.

   (b) Démontrer que la suite $(v_n)$ est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel $n$, $v_n \geqslant 1$.

   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \geqslant n + 1$.

   (d) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n$ : $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$.

   On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

   (b) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(r_n^2)$ et en déduire que $(r_n)$ converge vers $\sqrt{2}$.

   (d) Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

**7** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.

1. Calculer $u_1$ et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n > 4\,000.$$

   (b) On admet que la suite $(u_n)$ est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel $n$, on considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

   (a) Calculer $v_0$.

   (b) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison égale à $0,95$.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

   (d) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ? Justifier la réponse.

**8** On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$ : $\begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} &= \dfrac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$

1. On considère la suite $(u_n)$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.

   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme à préciser.

   (b) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

   (c) On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = 4b_n + 3a_n$.

   (d) Montrer que la suite $(v_n)$ est constante.

   (e) Préciser quelle est la valeur constante de $v_n$.

2. A l'aide des questions 1(b) et 2(b) , calculer les expressions de $a_n$ et $b_n$ pour tout entier naturel $n$.

3. Calculer $S_n = b_0 + b_1 + ... + b_n$ en fonction de $n$.