

1 Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de chaque suite (u_n) définie ci-dessous puis démontrer cette conjecture.

- $u_n = n - \frac{1}{n+1}$

- $u_n = n^2 + \sqrt{n}$

- $u_n = \frac{1}{n} - 2$

- $u_n = \frac{3}{n^2 + 1}$

- $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

- $u_n = (n+1)(2 - \sqrt{n})$

- $u_n = \frac{n^2 + 1}{\frac{1}{n} - 2}$

- $u_n = -2n^2 + 3n - 5$

- $u_n = (\sqrt{n} - 2)(10 - \frac{1}{n})$

- $u_n = \frac{3}{1 - 2\sqrt{n}}$

- $u_n = \frac{2n}{5} - 8 + \frac{2n}{n^2 + 1}$

- $u_n = \frac{3n^2 - 5n}{n+1}$

- $u_n = \frac{10^n - 5}{10^n + 2}$

- $u_n = \sqrt{2 + n^2} - n$

- $u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}$

2 Déterminer par comparaison la limite des suites suivantes :

- $u_n = n + 1 + (-1)^n$

- $u_n = n^2 + \sqrt{\frac{n+1}{n-2}}$

- $u_n = -n - \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$

- $u_n = n^3 + (-1)^n$

- $u_n = \sqrt{n} + \sin(n)$

- $u_n = 3n - 4 \sin(n)$

3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n^2$.

- En déduire la limite de la suite (v_n) .

4 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = 5 - \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

- À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de (u_n) .

- Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$5 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- En déduire la limite de la suite (u_n) .

5 (u_n) est la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$$

- Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

- En déduire la limite de (u_n) .

6 Montrer que :

- $u_n = n^2 - 6n + 5$ est minorée par -4 .

- $u_n = -n^2 - 2n + 8$ est majorée par 9 .

- $u_n = \frac{2}{n+1}$ est bornée.

7 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

- Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2 .

- En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

- Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

8 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

- Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4 .

- En déduire le sens de variation de (u_n) .

- La suite (u_n) est-elle convergente ?

9 Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{n!} = 0$$