Chapitre V

La loi binomiale

I Épreuve et loi de Bernoulli

Définition

On appelle *épreuve de Bernoulli* une expérience aléatoire $\mathscr{E}$ ayant deux issues possibles appelées (par habitude) succès (noté S) et échec (noté E ou encore $\overline{S}$).

Exemple

Pile ou face, ou, on lance un dé et on regarde si l'as (1) sort.

Définition

[Loi de Bernoulli] Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de succès et 0 sinon ; si l'on note p la probabilité du succès ; on dit alors que X suit la *loi de Bernoulli de paramètre p* . On a donc :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

II Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Lorsque l'on répète, n fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli de paramètre p, on dit que l'on a un *schéma de Bernoulli de paramètres* n *et* p.

Remarque

Le résultat d'un schéma de Bernoulli est donc une liste ordonnée de S et de E : $(E;E;S;S;\cdots;E;E;S)$ que l'on note souvent pour aller plus vite : $E\ E\ S\ S\ \cdots\ E\ E\ S$.

Définition

Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p étant donné, soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de succès. On dit alors que X suit la *loi binomiale de paramètres* n *et* p. On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$

Théorème

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout $k \in \{0;1;\cdots;n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque

La probabilité d'avoir n succès est $P(X = n) = p^n$

La probabilité d'avoir n échecs est : $P(X = 0) = (1-p)^n = q^n$ où l'on note $q = 1-p$

En conséquence, la probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$p(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n = 1 - q^n$$

Propriété

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$E(X) = np$$
et
$$V(X) = np(1-p) = npq$$

Remarque

L'**espérance** représente le nombre moyen de succès que l'on peut *espérer* obtenir avec cette expérience si on la répète un très grand nombre de fois.
La **variance** montre comment les données sont dispersées autour de la moyenne plus elle est proche de 0 plus les données sont concentrées plus elle est grande plus les données vont être dispersées.