Chapitre VI

Limite et continuité

I Limite en l'infini

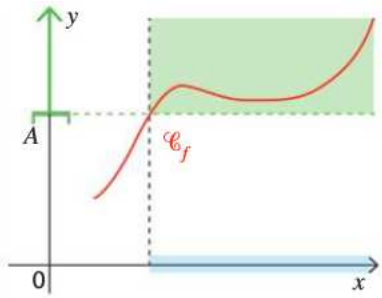
Définition : Limite infini

— Une fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

— Une fonction f a pour **limite** $-\infty$ **en** $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$



Remarque

On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$.

Propriété : Limite de quelques fonctions usuelles

Soit $n\geq 1$ un entier. Alors :

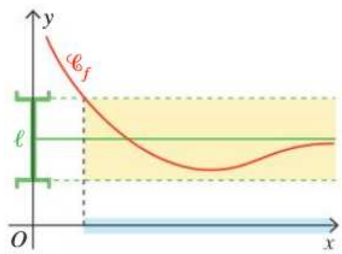
1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$

Définition : Limite finie

Soit ℓ un réel.

Une fonction f a pour **limite** ℓ **en** $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell}$



Remarque

On définit de façon analogue les limites finies en $-\infty$.

Propriété : limites de quelques fonctions usuelles

Soit $n\geq 1$ un entier. Alors :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ 3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$

Définition : Asymptote horizontale

Lorsqu'une fonction a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, on dit que sa courbe représentative admet pour **asymptote horizontale** en $+\infty$ la droite d'équation $y = \ell$.

Remarque

On définit de façon analogue un asymptote horizontale en $-\infty$.

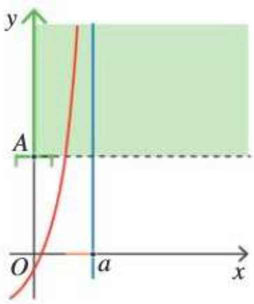
II Limite en un réel

Définition : S

oit $a \in \mathbb{R}$

— Une fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** a si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty}$



— Une fonction f a pour **limite** $-\infty$ **en** a si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty}$

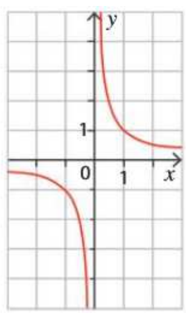
— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Une fonction f a pour **limite** ℓ **en** a si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell}$

Remarque

Une fonction peut avoir une **limite "à gauche"** et une **limite "à droite"** différentes.

Par exemple, $\underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty}_{\text{limite "à gauche"}}$ et $\underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty}_{\text{limite "à droite"}}$.



Remarque

Lorsqu'une fonction a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en $a \in \mathbb{R}$, on dit que sa courbe représentative admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation $x = a$.

III Opération sur les limites

PROPRIÉTÉ : SOMME, PRODUIT ET QUOTIENT

1. Limite de la somme de deux fonctions

Si $\lim f = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim g = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim (f+g) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

2. Limite du produit de deux fonctions

Si $\lim f = \dots$	ℓ	ℓ	∞	0
et $\lim g = \dots$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim (f \times g) = \dots$	$\ell\ell'$	∞	∞	Forme indéterminée

3. Limite du quotient de deux fonctions

Si $\lim f = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	∞	∞	0
et $\lim g = \dots$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
alors $\lim \left(\frac{f}{g}\right) = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	Forme indéterminée	Forme indéterminée

PROPRIÉTÉ : COMPOSÉE

a, c et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) & = b \\ \lim\limits_{X \to b} g(X) & = c \end{cases} \text{ alors } \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$$

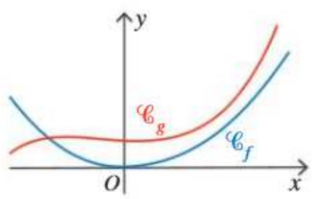
IV Limites et comparaison

PROPRIÉTÉ : THÉORÈME DE COMPARAISON

Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle du type $[A; +\infty[$.

— Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

— Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



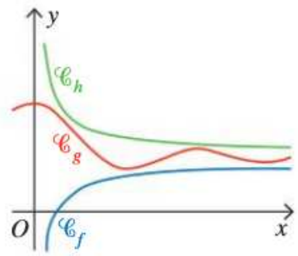
PROPRIÉTÉ : THÉORÈME D'ENCADREMENT - *dit des gendarmes*

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et trois fonctions f, g et h telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

sur un intervalle du type $[A; +\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$



V Fonctions continues

Définition

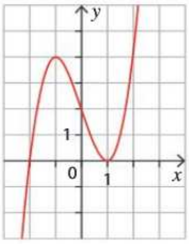
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **continue en** $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

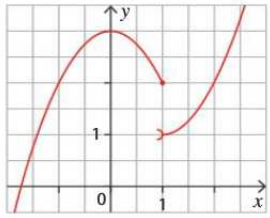
f est continue sur $\mathbb{R}$.



Contre-exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

f n'est pas continue en 1 donc n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.



Propriété

- Les fonctions usuelles c'est à dire affines, polynômiales, la fonction racine carrée et exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.
- Une fonction dérivable sur I est continue sur I.

Remarque

La réciproque du troisième point est fausse ! Par exemple les fonctions racine carré ou valeur absolue ne sont pas dérivables en 0 et sont pourtant continues.

Propriété : Continuité et suites convergentes

Soit f continue sur un intervalle I, $a \in I$ et (u_n) une suite à valeurs dans I.

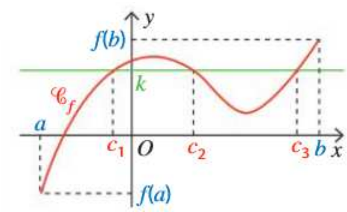
$$\text{Si } \lim_{n \to +\infty} u_n = a \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$$

VI Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.



Propriété : Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, si f est de plus **strictement monotone**, alors $f(x) = k$ admet une **unique** solution.

Remarque

On peut établir ce théorème dans les cas où f est continue sur des intervalles du type $]a; b[$ ou $[a; b[$ ou $]a; b]$ où a et b désignent des réels ou ∞.