Exercices

Chapitre 6 limites et continuité

1

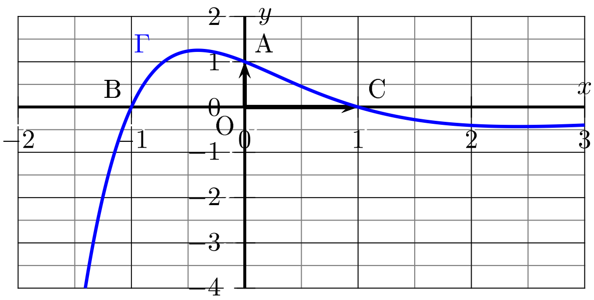
La courbe Γ ci-dessous est la représentation partielle donnée par la calculatrice de la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{-x}$$

dans un repère orthogonal du plan $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. La courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point A et l'axe des abscisses respectivement en B et C.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. On cherche à retrouver les unités.
   (a) Calculer les coordonnées des points A, B et C.
   (b) Placer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sur la figure ci-dessous.



2. Étude des limites
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   (b) On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$. Développer $f(x)$ et en déduire sa limite en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
3. Étude des variations
   On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que pour tout x réel :
   $$f'(x) = (x^2 - 2x - 1)\mathrm{e}^{-x}.$$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.
   (Les solutions seront arrondies à 10^{-2}.)
   Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Faire apparaître, sur le graphique, le ou les points de la courbe Γ en lesquels celle-ci admet une tangente horizontale.

2

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$

1. Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Montrer qu'il existe un réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 0,1 près.
4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
3. (a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$
   (b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f.

3

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

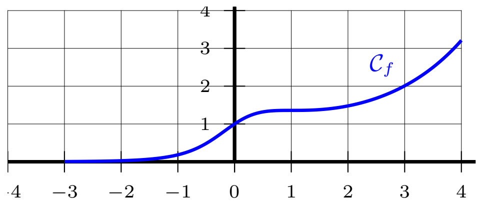
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

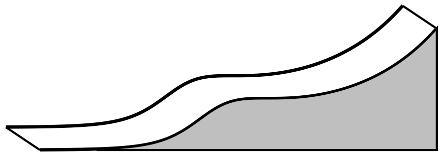
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
   (b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathcal{C}_f$



Vue de profil du toboggan

(a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

(b) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

4

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.

On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

   (c) Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. (a) Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

   (b) On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.

   Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.