**E**xercices

# Loi binomiale

**1** Une entreprise dispose d'un parc de 600 ordinateurs neufs. La probabilité que l'un d'entre eux tombe en panne pendant la première année est de 0,1. La panne de l'un des ordinateurs n'affecte pas les autres machines du parc.

1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner ses paramètres.
2. On considère la variable aléatoire $X$ correspondant au nombre d'ordinateurs tombant en panne au cours de la première année. Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?
3. Quelle est la probabilité que 20 appareils tombent en panne la première année ?
4. Quelle est la probabilité que 40 appareils ou moins tombent en panne durant la première année ?

**2** Dans une entreprise, un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de gestion a été suivi par 25 % du personnel.
On choisit dix personnes dans l'entreprise, qui possède un effectif suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note $X$ le nombre de personnes choisies qui ont suivi le stage.

1. Expliquer pourquoi $X$ suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer $P(X = 3)$. Interpréter.
3. Calculer la probabilité que quatre personnes au plus parmi les dix choisies aient suivi le stage.
4. Calculer la probabilité qu'au moins cinq personnes parmi les dix choisies aient suivi le stage.

**3** La fréquence du daltonisme en France est de 8,5 % pour les hommes et de 0,4 % pour les femmes. On considère que la taille de la population française est suffisamment grande pour que ce choix de personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise.

1. On choisit au hasard 20 hommes dans la population française. Quelle est la probabilité d'obtenir deux daltoniens ?
2. On choisit au hasard 20 femmes dans la population française. Quelle est la probabilité d'obtenir deux daltoniennes ?

**4** Une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,71$. Calculer à l'aide de la calculatrice, à $10^{-3}$ près :

a. $P(X = 25)$ b. $P(X \leq 30)$ c. $P(X < 20)$
d. $P(X > 21)$ e. $P(X \geq 12)$

**5** Une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,8$. Calculer à $10^{-3}$ près :

a. $P(X \leq 5)$ b. $P(X > 4)$ c. $P(3 \leq X \leq 8)$
d. $P_{(X\leq 9)}(6 \leq X)$ e. $P_{(X\leq 5)}(6 \leq X)$

**6** Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante et la probabilité qu'un retard se produise pour le dépannage à la suite d'un appel est $p = 0,25$. Un même client a appelé le service à huit dates différentes.
Soit $X$ le nombre de retards que ce client a subis.

1. Donner la loi de probabilité de $X$.
2. Calculer les probabilités des évènements :
   (a) $A$ : "le client a subi au moins un retard"
   (b) $B$ : "le client a quatre retards ou moins"

**7** On interroge 56 personnes et la variable aléatoire $X$ compte le nombre de personnes qui sont contre la construction d'un barrage. Les sondages précédents annoncent que 65 % des personnes interrogées sont contre la construction du barrage. On considère que les résultats n'ont pas changé et que la population est suffisamment grande pour considérer que le sondage s'assimile à un tirage avec remise.

1. Quelle loi suit $X$ ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement 40 personnes interrogées soient contre la construction du barrage ?
3. Quelle est la probabilité de compter 35 opposants ou moins à la construction ?
4. Quelle est la probabilité de compter au moins 30 opposants à la construction du barrage ?

**8** Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note $S$ l'évènement "le voyageur fait sonner le portique" et $M$ l'évènement "le voyageur porte un objet métallique". On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :

- lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi de 0,98.

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right)$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(S) = 0,02192$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. Arrondir à $10^{-3}$.

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0,02192$. Soit $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe.

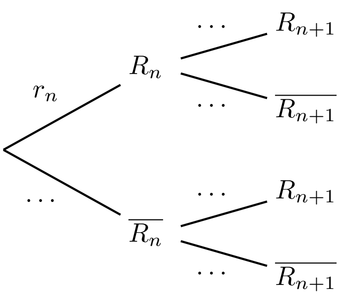
5. Justifier que $X$ suit une loi binomiale.
6. Sans justifier, donner à $10^{-3}$ près :
   (a) la probabilité qu'au moins un personne du groupe fasse sonner le portique ;
   (b) la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique ;
7. Donner la valeur du plus petit entier $k$ vérifiant $P(X \leq k) \geq 0,9$. Interpréter.

**9** Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$ ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$ ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $R_n$ l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la $n$-ième semaine ».

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements $R_1$ et $R_2$.
   (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
   (c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.
   (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
   On arrondira le résultat à $10^{-3}$.
2. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $r_n$ la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la $n$-ième semaine. On a alors $r_n = p\left(R_n\right)$.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :




   (b) Justifier que pour tout entier naturel $n$ non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.
   (d) Calculer la limite de la suite $(r_n)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**10** Soit $n$ un entier naturel non nul. On lance $n$ fois une pièce supposée équilibrée et on note, pour chaque lancer, le côté face ou pile obtenu.

1. Exprimer, en fonction de $n$, la probabilité $p_n$ d'avoir au moins un "face" lors des $n$ lancers.
2. Déterminer un algorithme qui détermine le plus petit entier $n$ tel que $p_n \geq 0,9999$.

**11** Dans une population de grand effectif, on a observé que 5% des individus sont allergiques au médicament A et 40% sont allergiques au médicament B.
Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire et ce de façon indépendante. On examine un échantillon de $n$ analyses choisies au hasard. On note $X$ la variable aléatoire qui associe à $n$ analyses le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent.

1. Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?
2. On suppose que $n = 10$. Calculer à $10^{-2}$ près les probabilités de chacun des événements suivants :
   (a) aucune analyse ne révèle l'allergie à A ;
   (b) au moins deux analyses révèlent l'allergie à A.
3. Un organisme tiers établit que 2% des individus sont allergiques à A et à B simultanément. Peut-on en conclure que les événements "être allergique à A" et "être allergique à B" sont indépendants ?
4. On considère la variable aléatoire $Y$ qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,4$.
   (a) Déterminer le plus petit entier $a$tel que $P(Y \leqslant a) > 0,025$ et le plus petit entier $b$ tel que $P(Y \leqslant b) \geqslant 0,95$.
   (b) En déduire un intervalle $I$ tel que $P(Y \in I) \geqslant 0,95$.
   (c) Dans un échantillon de 100 analyses, on a observé que 30 individus révèlent l'allergie B. Que peut-on en conclure ?