I - Module d'un nombre complexe

DÉFINITION 1 : MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$, où x et y sont des réels.

On appelle **module** de z le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple : Soit le complexe $z = 2 - 4i$. Son module est $|z| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

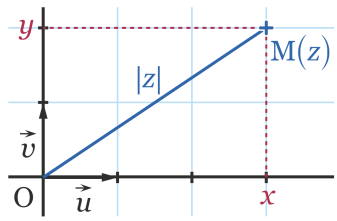
Remarques

— Le module d'un complexe est un nombre réel **positif**.

— Si z est un réel, alors son module est sa **valeur absolue**.

PROPRIÉTÉ 1 : INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

1. Si M est le point image associé au nombre z dans le plan complexe d'origine O alors $|z| = OM$.
2. Si $\vec{u}$ est le vecteur image associé au nombre z dans le plan complexe alors $|z| = \|\vec{u}\|$.
3. Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$.



PROPRIÉTÉ 2 : PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Soit $z \in \mathbb{C}$

• $z = 0 \iff |z| = 0$ • $|z|^2 = z\overline{z}$ • $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

PROPRIÉTÉ 3 : OPÉRATIONS SUR LES MODULES

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

1. — $|zz'| = |z||z'|$;
   — $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$;
   — $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Inégalité triangulaire $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Remarque

L'inégalité triangulaire est une égalité s'il existe un réel k positif tel que $z = kz'$.

DÉFINITION 2 : ENSEMBLE $\mathbb{U}$

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Remarques

— $\mathbb{U}$ signifie "unité".

— Il s'agit des nombres complexes dont les points images dans le plan sont situés à une distance de 1 à l'origine. Autrement dit, il s'agit du **cercle trigonométrique**.

Propriété 4 : Stabilité de $\mathbb{U}$

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit, quotient et passage à l'inverse.

- Si $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ alors $zz' \in \mathbb{U}$
- Si $(z, z') \in \mathbb{U}^* \times \mathbb{U}$ alors $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$
- Si $z \in \mathbb{U}$ alors $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$

II - Argument d'un nombre complexe

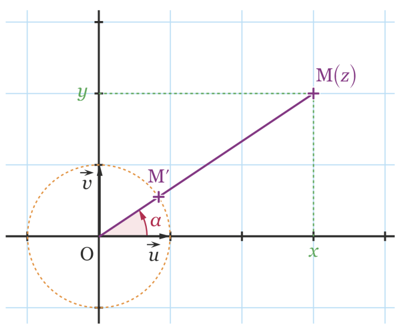
M est un point du plan complexe distinct de l'origine et d'affixe z.

Définition 3 : Angle orienté

On considère le point M' intersection de la demi droite $[OM)$ et du cercle trigonométrique. On note α **un** réel associé au point M' du cercle trigonométrique.

Ce réel est appelé **mesure de l'angle orienté** $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$.

On note $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou plus simplement $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}) = \alpha\ (2\pi)$.



Remarque

Un angle orienté admet une **infinité** de mesures, toutes égales à un multiple de 2π près. La mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est appelée **mesure principale**.

Propriété 5 : Interprétation géométrique

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. Si $\vec{w}$ est le vecteur image associé à z alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}) = \arg(z)\ (2\pi)$.
2. Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.
   Alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)\ (2\pi)$.
3. Si A, B sont deux points distincts et C et D deux autres points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ (2\pi)$.

Remarque

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Propriété 6 : Propriétés algébriques

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$
3. $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ (\pi)$
4. $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$. L'ensemble $i\mathbb{R}$ désigne les imaginaires purs.

Propriété 7 : Opérations sur les arguments

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$
2. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$
3. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ (2\pi)$

III - Forme trigonométrique d'un complexe

Propriété 8 : Forme trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons r son module et θ un argument. Alors z s'écrit sous la forme

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

Une telle écriture s'appelle **forme trigonométrique** de z.

Propriété 9 : Égalité de nombres complexes

Deux nombres complexes sont **égaux** si, et seulement si, ils ont **même module** et **même argument modulo** 2π.

Méthode : Déterminer la forme trigonométrique d'un complexe

Soit le nombre complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Calculons le module de z. $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
2. En factorisant par son module, on a $z = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ vérifie ces deux équations.

   Donc $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.
4. Finalement $z = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$