Échauffement

Chapitre VIII - Fonction logarithme

1 Simplifier

1. $\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^5$
2. $\mathrm{e}^{-4} \times \mathrm{e}^3$
3. $\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^4 \times \mathrm{e}^5$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^4}$
5. $\mathrm{e}^{2a} \times (\mathrm{e}^{-a})^3$
6. $\dfrac{\mathrm{e}^{2a+1}}{\mathrm{e}^{2-a}}$
7. $\dfrac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{a+1}}$
8. $(\mathrm{e}^{2a+1})^3 \times (\mathrm{e}^{-3a})^2$
9. $\dfrac{\mathrm{e}^{2-3a}}{\mathrm{e}^{1+a}}$
10. $\dfrac{\mathrm{e}^{3a+1}}{\mathrm{e}^{a} \times \mathrm{e}}$

2 Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{x}}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{e}^x - x^2 - 2x + 2$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x - x + 1$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(2x-3)}{\mathrm{e}^x}$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x+1)\,\mathrm{e}^x$.
- $\lim\limits_{x\to 0} 2\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + x^2$.

3 On considère la fonction f définie pour tout réel x, par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 6$.

1. Vérifier que, pour tout réel x, on a $f(x) = (\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x - 3)$.
2. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

4 Simplifier

1. $A = \ln(7) + \ln(8)$
2. $B = \ln(20) - \ln(4)$
3. $C = -\ln(4) + \ln(28)$
4. $D = 3\ln(2)$
5. $E = -2\ln(4)$
6. $F = \dfrac{1}{2}\ln(27)$
7. $\mathrm{e}^{\ln(3)}$
8. $\mathrm{e}^{-\ln(5)}$
9. $\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
10. $\ln(\mathrm{e}^5)$
11. $\ln(1) + \ln(\mathrm{e})$
12. $\ln(\mathrm{e}^{-2})$
13. $\ln(0,5) + \ln(2)$
14. $3\ln(2) - \ln(4)$
15. $(\ln(\mathrm{e}^3))^2$
16. $\mathrm{e}^{\ln(2)+\ln(3)}$
17. $\mathrm{e}^{2\ln 3}$
18. $\mathrm{e}^{4\ln 2}$
19. $\mathrm{e}^{-\ln 4}$
20. $\mathrm{e}^{-5\ln 2}$
21. $\mathrm{e}^{\ln(6)-2\ln(3)}$
22. $\mathrm{e}^{3\ln(2)-\ln(4)+1}$
23. $\dfrac{\mathrm{e}^{\ln(5)-1}}{\mathrm{e}^{2+\ln(5)}}$
24. $\dfrac{\mathrm{e}^{2\ln(3)-\ln(2)}}{\mathrm{e}^{-3\ln(2)}}$
25. $\ln(0,05)$
26. $2\ln(5\,\mathrm{e}^2) + \ln(4\,\mathrm{e}^{-2})$
27. $\mathrm{e}^{2\ln(5)} - \ln\left(\left(\mathrm{e}^5\right)^2\right)$
28. $30\ln(\sqrt{e}) - \mathrm{e}^{3\ln(3)}$
29. $\ln(27) - 2\ln(3)$
30. $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$
31. $\ln(3+\sqrt{5}) + \ln(3-\sqrt{5})$
32. $\ln\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{-x} = 7$
2. $\ln(x) = -2$
3. $\ln(-2x+1) = 4$
4. $\mathrm{e}^{-x+1} - 1 = 0$
5. $(2\,\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 5) = 0$
6. $2\ln(x) - 1 = 0$
7. $(\ln(x))^2 = 9$
8. $\mathrm{e}^{3x-2} = 2$

6 Calculer la dérivée des fonctions suivantes et déterminer leur sens de variation sur leur ensemble de définition :

1. $f(x) = 2\ln(x) - x$
2. $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$
3. $f(x) = -\ln(x) + x^2 - 1$
4. $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$
5. $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$
6. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$
7. $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x})$
8. $f(x) = x\ln(3x)$

7 Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2\ln(x) + x + 1$ en 0.
2. $f(x) = -x\ln(x) - x - 1$ en $+\infty$.
3. $f(x) = x\ln(x)x^2 + 2$ en $+\infty$.
4. $f(x) = 2(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 1$ en $+\infty$.
5. $f(x) = -(\ln(x))^2 + \ln(x)$ en 0.
6. $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(2 - \ln(x))$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$ en 0.
8. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0.
9. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ en 0.
10. $f(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{2x + 3}$ en 0.
11. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}$ en $+\infty$.
12. $p(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x} - 3)}{x}$ en $+\infty$.

8 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+1}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}\left(\dfrac{1}{2 + \frac{1}{x}}\right)$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9 Résoudre les inéquations suivantes, où n désigne un entier naturel.

1. $2^n \geq 10^{12}$
2. $0,9^n < 10^{-1000}$
3. $3 \times 4^n > 10^{50}$

10 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1,001$. Déterminer, s'il existe, le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10000$.