I - Formules d'addition et de duplication

Propriété 1 : Formules d'addition

Soient a et b deux réels.

1. $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
2. $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
3. $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$
4. $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

Exemples

— $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$

— $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

Propriété 2 : Formules de duplication

Soit a un réel.

1. $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(b)=2\cos^2(a)-1$
2. $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

II - Forme exponentielle d'un complexe

Définition : Notation $\mathrm{e}^{i\theta}$

Pour tout réel θ, on note $\quad \mathrm{e}^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta).$

Exemples

1. $\mathrm{e}^{i\pi}=-1$
2. $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}=i$
3. $\mathrm{e}^{2i\pi}=1$

Propriété 3 : relation fonctionnelle

Soient θ et θ' deux nombres réels et n un entier relatif.

1. $\mathrm{e}^{i\theta}\times\mathrm{e}^{i\theta'}=\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$
2. $\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{-i\theta}$
3. $\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}}=\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$
4. $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{in\theta}$

Exemples

— $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}=\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}.$

— $\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{14}}\right)^7=\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{14}}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}=i$

— $\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}=\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}$

Propriété 4 : Forme exponentielle

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous une forme exponentielle

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \text{ où } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)\,(2\pi)$$

Exemples

— $z = 2 + 2i$ et $z = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.
— $z = \sqrt{3} + i$ et $z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.
— $z = -2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas une forme exponentielle car $-2 < 0$. $-2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 2\,\mathrm{e}^{i\pi}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 2\,\mathrm{e}^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}$ est une écriture de z sous forme exponentielle.

III - Formules de Moivre et d'Euler

Propriété 5 : Formules d'Euler

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque

Les formules d'Euler permettent de **"linéariser"** certaines expressions. Nous travaillerons cela en exercices.

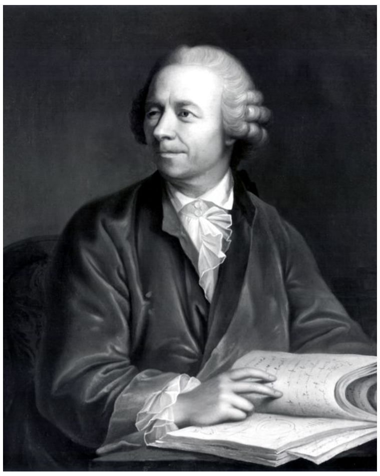
Propriété 6 : Formules de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier relatif n,

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Remarque

Il s'agit d'une autre manière d'exprimer l'égalité $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.



Leonhard Euler, 1707-1783