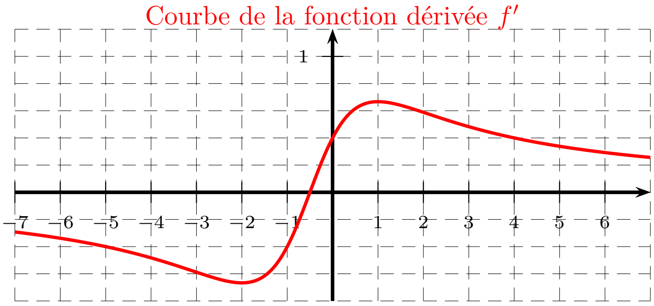
Exercices

Fonction logarithme

1 *Asie 7 juin 2021*

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.
   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

2 *Centres étrangers 12 mai 2022*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

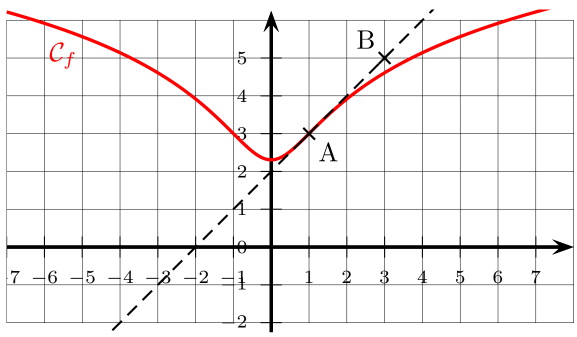
$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. (a) On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif :
   $$f'(x) = 1 + \ln(x).$$
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $f(x) \in]0\ ;\ 1[$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$:
   $$f(x) \geqslant x$$
4. On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
   (b) Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3 *Asie 17 mai 2022*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A$(1\,;\,3)$ et B$(3\,;\,5)$.
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.



Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2 + 1\right) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) + 3 - \ln(2).$$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

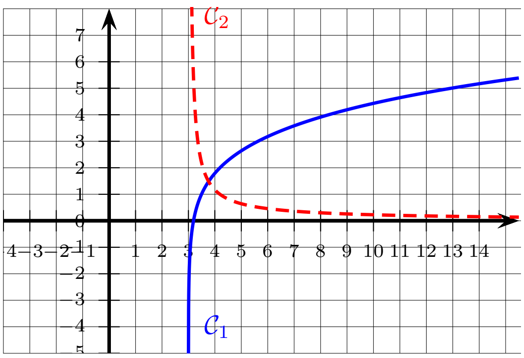
Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

4 *Asie 18 mai 2022*

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\ ;\ +\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\ ;\ +\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.

   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.

   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.
3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.

   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5\ ;\ 6[$.

   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. (a) Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{\left(x^2 - x - 6\right)^2}$.

   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur I.

5 *Amérique du Sud 26 septembre 2022*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
3. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   (d) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.

   Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.

   (a) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

   (b) En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$, $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha - 1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$.