Chapitre IX

Primitives et équations différentielles

I Primitive d'une fonction

Définition

Une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété : Existence d'une primitive

Si une fonction est continue sur un intervalle I alors elle admet des primitives sur I.

Propriété : Forme des primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I.

1. Les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

II Équations différentielles

Définition

Une **équation différentielle** est une équation dont les inconnues sont des fonctions et mettant en relation une fonction dérivable et sa dérivée.

Propriété : Solution de l'équation différentielle $y' = ay$

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

Démonstration

— Soit $C \in \mathbb{R}$. La fonction f_C définie sur $\mathbb{R}$ par $f_C(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_C(x) = Ca\,\mathrm{e}^{ax}$, donc $f'_C(x) = af_C(x)$. f_c est donc une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

— Montrons maintenant que ces fonctions f_C sont les seules solutions de (E). Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E).
Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = \mathrm{e}^{-ax}(g'(x) - ag(x))$. Or, pour tout réel x, $g(x) = ag(x)$ car g est solution de (E), donc $h'(x) = 0$.

— Ainsi h est constante sur $\mathbb{R}$, il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x, $h(x) = C$ autrement dit $C = g(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$ et finalement $g(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$.

Remarque

Si f et g sont deux solutions de cette équation alors $f+g$ et kf , où $k \in \mathbb{R}$, sont aussi des solutions. On qualifie cette équation différentielle de **linéaire**.

Propriété : résolution de l'équation $y' = ay + b$

Soient a et b deux nombres réels non nuls. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$. Alors :

1. (E) admet une unique **solution particulière** constante donnée par $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$.
2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle.
3. Si x_0 et y_0 sont des réels alors il existe une unique solution g vérifiant la **condition initiale** $g(x_0) = y_0$.

Propriété : résolution de l'équation $y' = ay + f$

Soient a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$ et g est une solution particulière de (E) sur I.

Alors les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} + g(x)$ où C est une constante réelle.