Exercices

Chapitre IX Équations différentielles

1

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population de pandas roux qui semble en voie de disparition. En 2020, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est 1 000.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2020).
D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$ et satisfait l'équation différentielle : $(E) : y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln(y))$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$, vérifie pour tout t de $[0;+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)(3-\ln(f(t)))$ vérifie pour tout t de $[0;+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $(H) : z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$.

3. En déduire l'expression de la fonction f.

4. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 20 individus.

2

```python
from math import *
a=0
b=10
def f(x):
 return(100*exp(-0.12*x))
while(abs(b-a)>0.01):
 m=(a+b)/2
 if f(m)>80:
  a=m
 else:
  b=m
print(a,b)
```

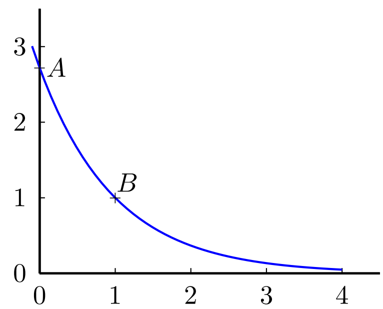
On considère l'équation différentielle $100y' + 12y = 0$ avec pour condition initiale $y(0) = 100$.

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. On considère l'algorithme suivant en langage python. Indiquer à quoi correspondent les valeurs de a et b obtenues en sortie de cet algorithme ?

3

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 0$ et telle que $f(0) = \mathrm{e}$.



1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit c un réel donné de l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{1-x} = c$ d'inconnue x.

3. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{1-x}$.

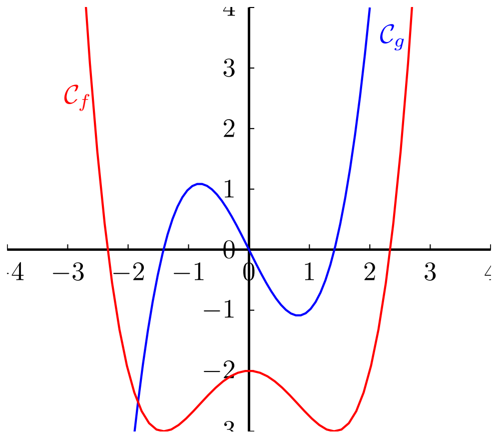
4. On considère l'algorithme écrit en Python.

```python
from math import *
def fonction_solution(x):
 return(e**(1-x))
p=int(input( "p=", ))
x=0
while fonction_solution(x)>10**(-p):
 x=x+1
print(x)
```

Pourquoi est-on certain que, pour n'importe quel entier naturel p rentré, l'algorithme va s'arrêter ?

4

On a représenté deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ dans un repère du plan. Déterminer laquelle des deux est une primitive de l'autre.



5

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

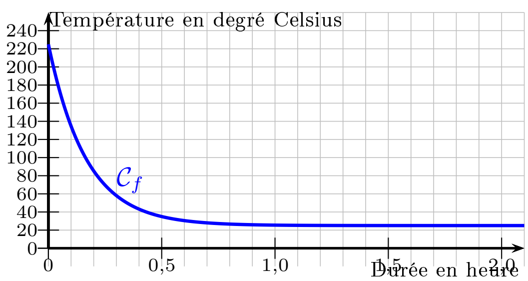
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.
Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. (a) Préciser la valeur de $f(0)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
   (c) En déduire que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200\mathrm{e}^{-6t} + 25$.
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   - décroît ;
   - tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$.

   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note $\mathcal{T}_0$ le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

   On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. Avec la précision permise par le graphique, lire $\mathcal{T}_0$. On donnera une valeur approchée de $\mathcal{T}_0$ sous forme d'un nombre entier de minutes.
5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

   Ainsi, pour un entier naturel n, $\mathcal{D}_n$ désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

   On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right).$$

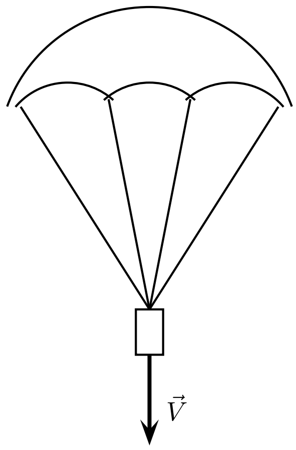
   (a) Vérifier que 19 est une valeur approchée de $\mathcal{D}_0$ à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right).$$

   En déduire le sens de variation de la suite $(\mathcal{D}_n)$, puis la limite de la suite $(\mathcal{D}_n)$.
   Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?

6

Vitesse d'un parachute La vitesse d'un objet suspendu à un parachute est solution de l'équation (E) : $mv'(t) + kv(t) = mg$.
On prendra : $m = 10kg$, $g = 10\,m.s^{-2}$ et $k = 25$ u.S.I.



1. Déterminer la fonction constante v_p solution de (E).

   Donner alors l'ensemble des solutions de (E).
2. (a) Donner la solution v_1 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est $v_1(0) = 5\,m.s^{-1}$.
   (b) Donner la solution v_2 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est $v_2(0) = 10\,m.s^{-1}$.
   (c) Donner la solution v_3 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est nulle.
   (d) Déterminer les limites lorsque $t \to +\infty$ des fonctions v_1, v_2 et v_3.

7

Un réservoir contient 1000 litres d'eau douce dont la salinité est de $0,12\ g.L^{-1}$.
A la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans le réservoir à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la salinité dans le réservoir. On note s cette salinité, s étant donc une fonction du temps t.
On admet que s est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad s' + 0,01s = 0,39$$

1. (a) Résoudre l'équation (E_1) : $\quad s' + 0,01s = 0$.
   (b) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).
   (c) Résoudre l'équation (E).
2. A l'instant $t = 0$ où débute l'incident, la salinité de l'eau dans le réservoir était de $0,12\ g.L^{-1}$.

   Montrer que l'on alors $s(t) = 39 - 38,88\,e^{-0,01t}$.
3. Déduire du résultatprécédent la salinité de l'eau dans le réservoir au bout de 60 minutes.
4. De combien de temps le service d'intervention dispose-t'il pour colmater l'infiltration si la salinité doit rester inférieure à $3,9\,g.L^{-1}$?