Ex. 1 — Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

a. $z = 4i$
b. $z = -11$
c. $z = 1 + i$
d. $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$
e. $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
f. $z = \dfrac{-\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{15}}{2}$
g. $z = 4\sqrt{3} + 4i$

Ex. 2 — Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

a. $z = 3\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$
b. $z = 4\,\mathrm{e}^{i\pi}$
c. $z = 5\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$
d. $z = 7\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$

Ex. 3 — Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

a. $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \times \mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{4}}$
b. $z = -\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$
c. $z = 4 \times \mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$
d. $z = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}}$
e. $z = \dfrac{8i}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}$
f. $z = 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}}$
g. $z = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^5$
h. $z = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^5}{\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7}$

Ex. 4 — Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

a. $z = \left(\dfrac{i}{2}\right)^{18}$
b. $z = \dfrac{2 - 2i}{1 + i}$
c. $z = (1 + i)^{13}$
d. $z = (\sqrt{3} + i)^{11}$

Ex. 5 — On pose $z = 3 - i\sqrt{3}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z.
2. En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

   a. $4z$ c. $-2z$ e. $\overline{z}$
   b. $-iz$ d. $3iz$ f. $i\overline{z}$

Ex. 6 — À l'aide des formules d'Euler **linéariser** $\cos^3(x)$, c'est-à-dire exprimer $\cos^3(x)$ sous forme d'une somme de termes de la forme $\cos(nx)$ où n est un entier naturel.

Ex. 7 — Linéariser les expressions suivantes où x est un réel.

a. $\cos^4(x)$
b. $\sin^5(x)$
c. $\cos^2(x)\sin^3(x)$
d. $\cos^3 + 2\sin^3(x)$

Ex. 8 — Soit x un réel.

1. Développer $(\cos(x) + i\sin(x))^3$.
2. À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(x) + i\sin(x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Démontrer que :
   a) $\cos^3(x) = \dfrac{3\cos(x) + \cos(3x)}{4}$
   b) $\sin^3(x) = \dfrac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$

Ex. 9 — Soit f la fonction définie sur $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \cos(2x)\sin(3x)$.

1. Linéariser l'expression de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$

Ex. 10 — Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Ex. 11 — On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1 + \mathrm{i}}{(1 - \mathrm{i})^n}$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   b) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.
2. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

Ex. 12 — Soient les deux nombres complexes $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}$. On pose $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. a) Donner la forme algébrique de Z.
   b) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
   c) Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
   d) En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
   e) On admet que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}.$$