Ex. 1 — Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}(44)$ des diviseurs de 44 et $\mathcal{D}(154)$ des diviseurs de 154.

1. En déduire l'ensemble des diviseurs communs de 44 et 154, puis le PGCD de 154 et 44.

Ex. 2 — Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide les PGCD suivants :

a) PGCD$(279; 11222)$; d) PGCD$(2001; 2019)$;

b) PGCD$(181; 1027)$; e) PGCD$(423; 741)$;

c) PGCD$(747; 310)$; f) PGCD$(-185; 34)$.

Ex. 3 — Quel est le PGCD de deux entiers consécutifs ?

Ex. 4 — Calculer PGCD$(2^{12} - 1; 2^{21} - 1)$.

Ex. 5 — n est un entier naturel non nul. Calculer le PGCD de $3n + 5$ et $n + 2$.

Ex. 6 — Soit $n \in \mathbb{N}$. $a = n + 3$ et $b = 2n + 1$. On pose $g = \text{PGCD}(a; b)$.

1. Montrer que g divise 5.
2. En déduire pour quelle(s) valeur(s) de n on a $g = 5$ puis $g = 1$.

Ex. 7 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer PGCD$(A; B)$ dans chacun des cas suivants :

1.$A = 3n^2 + n$ et $B = 3n^2$;

2.$A = 3n^2 + 2n$ et $B = 2n^2 + n$.

Ex. 8 — Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?

a) 4847 et 5633 ; b) 5617 et 813.

Ex. 9 — n est un entier naturel non nul.

1. Démontrer que PGCD$(n; 3n + 7)$ = PGCD$(n; 7)$.
2. Déterminer PGCD$(n; 3n + 7)$ lorsque n est un multiple de 7.
3. Déterminer PGCD$(n; 3n + 7)$ lorsque n n'est pas un multiple de 7.

Ex. 10 — a et b sont deux entiers naturels non nuls.
On pose $A = 2a + b$ et $B = 3a + b$.
Montrer que PGCD$(A; B)$ = PGCD$(a; b)$.

Ex. 11 — Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls dans chacun des cas suivants :

1. $a + b = 72$ et PGCD$(a; b) = 9$;
2. $ab = 439230$ et PGCD$(a; b) = 121$.

Ex. 12 — Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que PGCD$(n + 10; n - 2)$ = PGCD$(n - 2; 12)$.
2. Déterminer les valeurs possibles de PGCD$(n + 10; n - 2)$.
3. Si PGCD$(n + 10; n - 2) = 12$ quelles sont les valeurs possibles de n ?
4. Pour quelles valeurs de n la fraction $\dfrac{n + 10}{n - 2}$ est-elle irréductible ?

Ex. 13 — On se propose d'étudier les couples $(a; b)$ d'entiers strictement positifs tels que $a^2 = b^3$.

1. Soit k un entier naturel non nul. Vérifier que le couple $(k^3; k^2)$ répond à la question.
2. Soit $(a; b)$ un tel couple et $d = a \wedge b$. On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.
   a) Montrer que $u^2 = dv^3$.
   b) En déduire que v divise u, puis que $v = 1$.
3. Soit $(a; b)$ un couple d'entiers strictement positifs. Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
4. Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0\,[7]$ ou $n \equiv 1\,[7]$.

Ex. 14 — On suppose que a est premier avec b et c.

1. Traduire en utilisant le théorème de Bézout que les entiers a et b sont premiers entre eux.
2. Faire de même pour les entiers a et c.
3. Multiplier membre à membre ces égalités et justifier que a et bc sont premiers en eux.

Ex. 15 — Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :

a) $88u + 63v = 1$; b) $83u + 47v = 1$.

Ex. 16 — Démontrer que les entiers a et b suivants sont premiers entre eux :

1.$a = n$ et $b = 3n + 1$;

2.$a = -n + 4$ et $b = 3n - 11$;

3.$a = 6n + 3$ et $b = 3n + 1$.

Ex. 17 — Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
a) $5x = 7y$; b) $18x = 27y$; c) $21(x + 5) = 18y$.

Ex. 18 — Prouver que la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n.

Ex. 19 — Déterminer si les équations diophantiennes suivantes ont des solutions puis les déterminer le cas échéant :

a) $9x + 11y = 1$; e) $3x + 4y = 1$;

b) $18x + 15y = 6$; f) $5x - 75y = 4$;

c) $7x + 12y = 3$; g) $5x - 8y = 2$;

d) $18x + 15y = 8$. h) $77x + 50y = 5$.

Ex. 20 — Existe-t-il un entier n tel que $\dfrac{n-6}{15}$ et $\dfrac{n-5}{12}$ soient tous deux des entiers ?

Ex. 21 — Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $x_0 = 3$ et$x_{n+1} = 2x_n - 1$, $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = 2y_n + 3$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. a) Calculer le PGCD de x_2 et x_3. Que peut-on en déduire ?
   b) x_n et x_{n+1} sot-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.
   b) Exprimer y_n en fonction de n.
   c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier selon les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
4. On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
   a) Écrire un algorithme donnant d_n suivant les valeurs de n. Émettre une conjecture sur la valeur de d_n.
   b) Démontrer la conjecture émise en a.

Ex. 22 — **Un cas particulier du théorème chinois.**

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système (S) :

$$\begin{cases} n \equiv 9\,[17] \\ n \equiv 3\,[5] \end{cases}$$

1. **Recherche d'un élément de S.**
   On désigne par $(u; v)$ un couple d'entiers relatifs et que $17u + 5v = 1$.
   a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u; v)$.
   b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Démontrer que $n_0 \in S$.
   c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à S.
2. **Caractérisation des éléments de S.**
   a) Montrer que le système (S) est équivalent au système
   $$\begin{cases} n \equiv 17k + 9 \\ n \equiv 5k' + 3 \end{cases}$$
   b) En utilisant astucieusement l'identité obtenue en 1.a) montrer que
   $$n = 5v \times 17k + 17u \times 5k' + 5v \times 9 + 17u \times 3.$$
   c) En déduire que $n \equiv n_0\,[85]$.
   d) Soit $n \in S$. En déduire que n peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$, où $k \in \mathbb{Z}$.
   e) Réciproquement, montrer que si n est un entier qui peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$, alors $n \in S$.
3. **Application**.
   Zoé sait qu'elle possède entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.

   Combien a-t-elle de jetons ?