Exercices

Orthogonalité et plans de l'espace

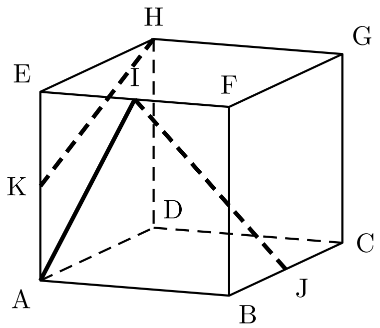
1 L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A$(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$ B$(1\ ;\ 0\ ;\ -3)$, C$(6\ ;\ 6\ ;\ 1)$ et E$(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$;
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
   (c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ arrondie au degré.
2. (a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan ABC.
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan ABC et passant par le point E.
   (d) Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan ABC a pour coordonnées $\left(4\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à $16,5$ unités de volume.

2 On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

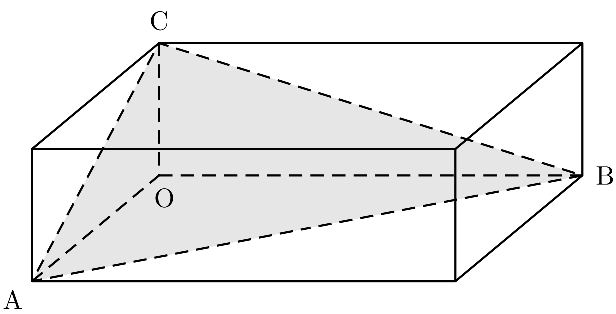
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 + t \\ y & = & 8 - 2t \\ z & = & -2 + 3t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$$

$$d_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4 + t \\ y & = & 1 + t \\ z & = & 8 + 2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
5. Montrer que le point L$(4\,;\,0\,;\,3)$ est le projeté orthogonal du point M$(5\,;\,3\,;\,1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

3 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A de coordonnées $(2\,;\,0\,;\,0)$, B de coordonnées $(0\,;\,3\,;\,0)$ et C de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.
2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   (b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{12}{49}\ ;\ \frac{36}{49}\right)$.
   (c) Calculer la distance OH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

4 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants : J$(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, K$(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et L$(-2\ ;\ -2\ ;\ -2)$.

1. (a) Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.

   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL en cm^2.

   (c) Déterminer une valeur approchée au dixième près de l'angle géométrique $\widehat{\text{JKL}}$.

2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}6\\3\\-10\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (JKL).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Dans la suite, T désigne le point de coordonnées $(10\ ;\ 9\ ;\ -6)$.

3. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.

   (b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point T sur le plan (JKL).

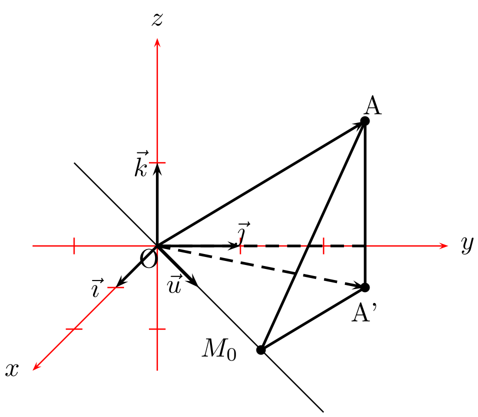
   (c) On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

   Calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT en cm^3.

5 Dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.

   (a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que $AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$.

   (b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.

   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.

   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

6 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A$(-1\ ;\ -1\ ;\ 3)$, B$(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$, C$(1\ ;\ -1\ ;\ 7)$.

On considère également la droite Δ passant par les points D$(-1\ ;\ 6\ ;\ 8)$ et E$(11\ ;\ -9\ ;\ 2)$.

1. (a) Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -1+4t \\ y & = & 6-5t \\ z & = & 8-2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

   (b) Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.

   (c) Le point F$(1,36\ ;\ -1,7\ ;\ -0,7)$ appartient-il à la droite Δ' ?

2. (a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

   (b) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

   (c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.

3. (a) Montrer que le point G$(7\,;\,\text{-}4\,;\,4)$ appartient à la droite Δ.

   (b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).

   (c) En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

4. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   (b) Calculer le volume V du tétraèdre ABCG.