

# Orthogonalité et distance dans l'espace

## I Orthogonalité et produit scalaire

### A Orthogonalité dans l'espace



#### Définition

On dit qu'un vecteur est orthogonal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.



#### Propriété

Si un vecteur est orthogonal à un plan, alors il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.



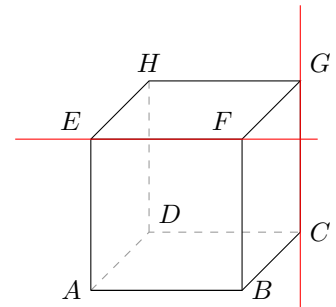
#### Définition

Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.

#### REMARQUE

Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais la réciproque est fausse.

Dans le cube ci-contre, les droites  $(EF)$  et  $(CG)$  ne sont pas perpendiculaires mais elles sont orthogonales.



### B Définition du produit scalaire



#### Définition

Le **produit scalaire** de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

#### REMARQUE

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$ , lorsque  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$  où  $\vec{v}_1$  est le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur une droite dirigée par  $\vec{u}$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ .
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ , où  $A, B$  et  $C$  sont trois points distincts du plan.



#### Définition

Un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace est dit orthonormé si les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont orthogonaux deux à deux et si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ .



#### Propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ . Alors  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ .

**Propriété**

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs et  $\lambda$  un réel. Alors :

$$- \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$- \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$- (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$- (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$- (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

**C Orthogonalité de deux vecteurs****Propriété**

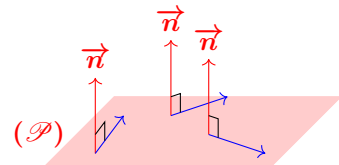
Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

**Propriété**

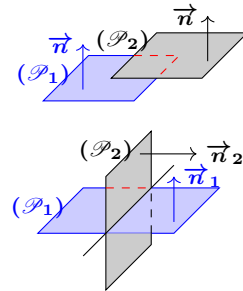
Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

**II Plan de l'espace****A Vecteur normal à un plan****Définition**

Un vecteur  $\vec{n}$  est dit normal à un plan  $(\mathcal{P})$  s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans  $(\mathcal{P})$ .

**Propriété**

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

**B Équation cartésienne d'un plan de l'espace****Propriété**

Dans l'espace munit d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé de l'espace, on pose  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et un point  $A(x_A; y_A; z_A)$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  admet pour équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

**DÉMONSTRATION**

Soit  $M(x; y; z)$  un point du plan  $\mathcal{P}$  alors par définition le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  est orthogonal à  $\vec{n}$ .

Donc  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  on obtient alors  $(x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0$  en développant on obtient  $ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$

### III Distance dans l'espace

— RAPPEL —

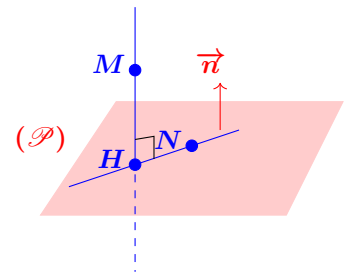
On se place dans l'espace munit un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé de l'espace, si on pose  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  alors  $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$  et  $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

#### A Projection orthogonale



**Définition**

On considère un plan  $\mathcal{P}$  de l'espace dont on connaît un vecteur normal  $\vec{n}$  et un point  $M$  extérieur au plan.  
Le **projeté orthogonal** du point  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}$  est l'intersection entre le plan et la droite de vecteur directeur  $\vec{n}$  et passant par  $M$ .



**Définition**

On considère une droite  $d$  de vecteur directeur  $\vec{n}$  et un point  $N$  extérieur à cette droite.  
Le **projeté orthogonal** de  $N$  sur  $d$  est l'intersection du plan normal à  $\vec{n}$  passant par  $N$  avec la droite  $d$ .

#### B Distance d'un point à une droite ou un plan



**Définition**

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace et  $A$  un point.  
La **distance** du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$  est la plus petite des longueurs  $AM$  avec  $M \in \mathcal{P}$ . On la note  $d(A, \mathcal{P})$ .



**Propriété**

Si l'on note  $H$  le projeté orthogonal d'un point  $A$  sur un plan  $\mathcal{P}$ , alors  $d(A, \mathcal{P}) = AH$ .

— DÉMONSTRATION —

Soit un point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  distinct de  $H$ . Comme la droite  $(AH)$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ , on en déduit que le triangle  $AHM$  est rectangle en  $H$  et donc quelque soit le point  $M$  du plan, la distance  $AM$  sera supérieure à  $AH$ , donc  $d(A, \mathcal{P}) = AH$ .



**Propriété**

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$  et  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point. Si on note  $\vec{n}$  un vecteur normal de  $\mathcal{P}$ , alors :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$