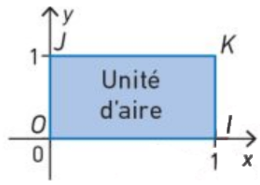
I - Aire sous la courbe d'une fonction continue positive

Définition 1 : unité d'aire

Soit un repère orthogonal (O, I, J), soit K le point de coordonnées $(1; 1)$.

L'aire du rectangle $OIKJ$ est appelé **unité d'aire** (u.a).



Exemple

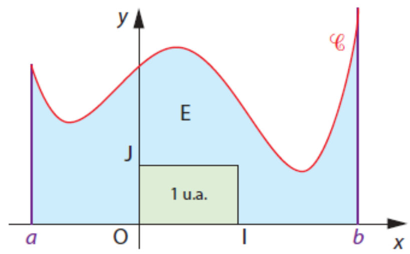
Si $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a $= 6$ cm^2.

Définition 2 : domaine sous la courbe d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est appelée **intégrale de a à b de la fonction f**.

Elle est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque

La variable x est dite **variable muette**, on peut aussi écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et F la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction F est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f.

II - Propriétés des intégrales

Propriété 1 : Positivité

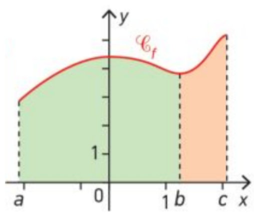
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Propriété 2 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; c]$ et soit $b \in [a; c]$. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$



III - Application au calcul d'aires

Propriété 5 : corollaire du théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarques

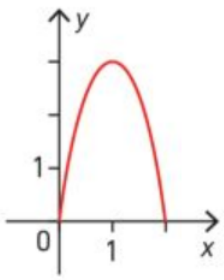
1. $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie. Si G est une primitive quelconque de f, $G = F + k$ donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$.
2. Le nombre $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = -3x^2 + 6x$ définie sur $\mathbb{R}$. On note A l'aire sous la courbe de f sur l'intervalle $[0;2]$.

La fonction f est continue sur $[0;2]$ et $f(x) = 3x(-x+2)$, donc f est positive sur $[0;2]$. La fonction $F(x) = -x^3 + 3x^2$ est une primitive de f sur $[0;2]$.
On a donc

$$A = \int_0^2 -3x^2 + 6x\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = (-2^3 + 3\times 2^2) - (-0^3 + 3\times 0^2) = 4$$



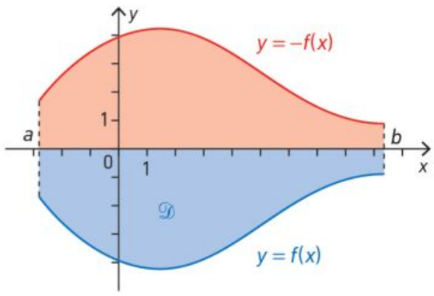
La propriété suivante exploite la symétrie entre la courbe d'une fonction f et la courbe de la fonction $-f$ afin de calculer l'aire "sous" la courbe d'une fonction continue **négative**.

Propriété 6 : aire sous la courbe d'une fonction négative

Soient f une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée eu unités d'aire, est égale à

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x.$$

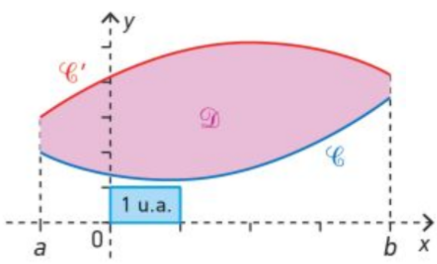


Propriété 7 : aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

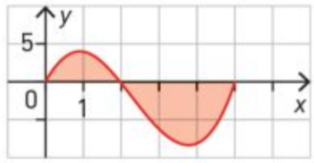
L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par ls courbe $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée eu unités d'aire, est égale à

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$



Exemple

Soit la fonction $f(x) = x(x-2)(x-5)$ définie sur $[0;5]$ dont la courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre dans le repère orthogonal d'unité 0,5 cm.



Calculons l'aire de la partie colorée.

1. Étudions le signe de f sur $[0,5]$.
   Pour tout $x \in [0;5]$, $x \geq 0$ et $x - 5 \leq 0$ donc $x(x-5) \leq 0$.
   Le signe de f est donc l'opposé du signe de $x - 2$ sur $[0;5]$. Or $x - 2 \leq 0$ si et seulement si $x \leq 2$ et $x - 2 \geq 0$ si et seulement si $x \geq 2$.
   Finalement, f est positive sur $[0;2]$ et négative sur $[2;5]$. Vous allez me dire que cela se voit sur le dessin, mais vous savez bien que ce n'est pas un argument convaincant.
2. Calculons une primitive de f. En développant on obtient $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$.
   Une primitive sur $[0;5]$ est donnée par $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{7x^3}{3} + 5x^2$.
3. Notons $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$ sur $[0;2]$.
$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$
4. Notons $\mathcal{A}'$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$ sur $[2;5]$.
$$\mathcal{A}' = \int_2^5 -f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 5x^2\right]_2^5 = 15,75.$$

L'aire colorée est finalement de $\dfrac{253}{12}$ u.a. Or 1 u.a. $= 0,5 \times 5 \times 0,5 = 1,25$ cm^2 donc l'aire colorée est de $26,35$ cm^2 environ.

IV - Intégrale d'une fonction continue

La définition suivante généralise la notion d'intégrale dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque.

Définition 3 : intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b appartenant à I. Soit F une primitive de f sur I. L'**intégrale de a à b de f** est définie par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Propriété 8 : relation de Chasles et linéarité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b et c appartenant à I et λ un réel.

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. **Relation de Chasles** : $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. **Linéarité** :
   — $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
   — $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriété 9 : positivité et Inégalité

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$.

1. **Positivité :** si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
2. **Ordre :** si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Définition 4 : valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a;b]$ le nombre réel

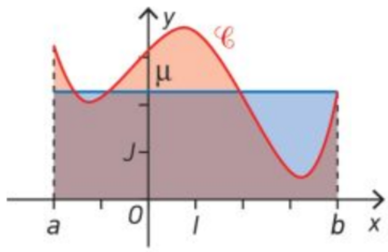
$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Interprétation géométrique

Si f est une fonction positive, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

L'aire sous la courbe de la fonction f (en rouge) est donc égale à l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de hauteur μ (en bleu).



Propriété 10 : Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I et a et b deux réels appartenant à I. Alors

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Exemples

Soit la fonction $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$ et calculons $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Posons pour tout $x \in [1;2]$, $v(x) = x-1$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$. On a donc, pour tout $x \in [1;2]$, $v'(x) = 1$ et on peut choisir $u(x) = \mathrm{e}^x$.
u et v sont dérivables sur $[1;2]$ et u' et v' sont continues sur $[1;2]$. Intégrons donc par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \underbrace{(x-1)}_{v(x)}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{u'(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [(x-1)\,\mathrm{e}^x]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= (2-1)\,\mathrm{e}^2 - (1-1)\,\mathrm{e}^1 - [\mathrm{e}^x]_1^2 \\
&= \mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) \\
&= \mathrm{e}
\end{aligned}$$