Exercices

Calcul intégral

1 Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
For i in range(12) :
    U =
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$. Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
$-0,2$	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
$-6\ 634$	29 654
$-66\ 341$	296 539
$-729\ 752$	3 261 928
$-8\ 757\ 025$	39 143 135
$-113\ 841\ 326$	508 860 754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :
$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$
Utiliser cette formule pour calculer I_2.

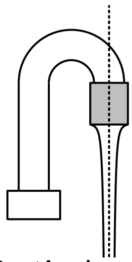
4. (a) Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}$.
   (b) Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :
$$u_n = n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$
On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :
$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$.
   (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n)$ lorsque $u_1 = 0,7$.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n)$ lorsque $u_1 = 0,8$.

2 L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.



On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe 1** par la courbe C dans un repère orthonormé.

Partie A

On considère que la courbe C donnée en **annexe 1** est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(H) : \ f(1) = 0 \qquad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.$$

1. La fonction f peut-elle être une fonction polynôme du second degré ? Pourquoi ?

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = k\ln x$.
   (a) Déterminer le réel k pour que la fonction g respecte les trois conditions (H).
   (b) La courbe représentative de la fonction g coïncide-t-elle avec la courbe C ? Pourquoi ?

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $h(x) = \dfrac{a}{x^4} + bx$ où a et b sont des réels.
Déterminer a et b pour que la fonction h respecte les trois conditions (H).

Partie B

On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction $f$continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right).$$

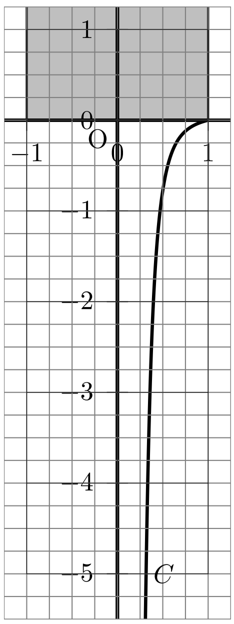
1. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ une unique solution qui sera notée α. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2. On admet que le volume d'eau en cm^3, contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} \pi x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) Soit u la fonction dérivable sur $]0\,;\,1]$ définie par $u(x) = \dfrac{1}{2x^2}$. Déterminer sa fonction dérivée.

   (b) Déterminer la valeur exacte de V. En utilisant la valeur approchée de α obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de V.

Annexe 1



3

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}\,x$.

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

2. (a) Calculer $I_0 - I_1$.

   (b) En déduire I_1.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n :
$$I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

   (b) Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.

4. Soit n un entier naturel non nul.

   On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

   (b) En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.

   (b) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4 La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5$ μg/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.
On utilisera dans la suite la modélisation suivante :
$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$
où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. (a) Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

   (b) Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

   (c) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

   Vérifier que pour tout nombre réel t positif,
$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$

3. (a) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

   (b) À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?

   Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. (a) Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0\,;\,4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.

   En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

   On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4\,;\,+\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.

   On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

   (b) Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

5. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -12(t+4)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.

   (a) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f et en déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'unité près.

   (b) En déduire une valeur approchée à $0,1$ près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à $2,5$ μg/mL.