Échauffement

Chapitre X - Équation de plan et distance dans l'espace

1 Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ déterminer une équation du plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et passant par A dans les cas suivants.

1. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ $\quad A\left(1;0;1\right)$
2. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}6\\7\\-4\end{pmatrix}$ $\quad A\left(3;-2;2\right)$

2

Pour chacun des plans suivants déterminer un vecteur normal et dire si le point $P(1;3;5)$ appartient au plan.

1. $x-2y+z+4=0$
2. $5x-z=0$
3. $x+y+z+9=0$
4. $3x+2y-3z+6=0$

3

Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $G(3;3;3)$ et orthogonale au plan $\mathscr{L}$ d'équation $x+2y-2z+15=0$.
En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de G sur $\mathscr{L}$

4

Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=2t+1\\y=t-3\\z=-2t+4\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$ et le point $S(1;1;1)$.

1. Déterminer une équation du plan orthogonal à d et passant par S.
2. Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection du plan et de d.
3. Que représente ce point ?
4. Calculer la distance entre S et d.

5

Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+3y-6z+12=0$ et $\mathscr{P}'$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-1\\2\end{pmatrix}$ contenant le point $M(3;2;3)$.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$.
2. (a) Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
   (b) Le plan $\mathscr{P}$ contient-il le point M ?
3. Calculer les coordonnées de $-3\overrightarrow{n'}$. Qu'en déduire pour les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$?

6 Soit le point $D(5;6;1)$ de l'espace et le plan d'équation cartésienne $2x-3y=0$.

1. Déterminer un vecteur normal au plan.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan passant par le point D.
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point D sur le plan.
4. Calculer la distance du point D au plan.

7 Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite et du plan donnés, s'il existe.

1. $\begin{cases}x=-7+t\\y=4+2t\\z=-5-t\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$ et $2x+3y-z+6=0$
2. $\begin{cases}x=-1-2t\\y=2-t\\z=-3+5t\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$ et $x+5y+z+6=0$
3. $\begin{cases}x=6+t\\y=-1+2t\\z=-3-t\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$ et $x+y+3z-1=0$

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection des deux plans donnés.

1. $x+y+2z-3=0$ et $x-4y+5z-6=0$
2. $-x+y+2z+1=0$ et $x-y-2z+5=0$
3. $-x+y+2z+1=0$ et $x-2y+4=0$

9 On donne a,b, c et d quatre réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point quelconque de l'espace. On considère un point $M(x;y;z)$ un point du plan $\mathscr{P}$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à $\mathscr{P}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}$.
3. En utilisant la formule du cosinus, exprimer $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}$.
4. Que peut-on dire de l'angle $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{n}\right)$.
5. En déduire que $|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}|=AH\times\|\overrightarrow{n}\|$.
6. En remarquant que $d=-ax-by-cz$, simplifier l'expression analytique de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}$.
7. Retrouvez la formule de la distance d'un point à un plan.