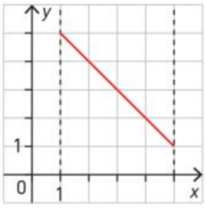
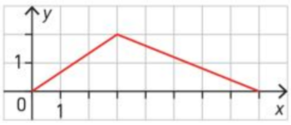
Échauffement

Chapitre XI - Calcul intégral

1 Dans un repère orthonormé, la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1;5]$ est représentée ci-dessous par une droite. Déterminer graphiquement $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t$.



2 Dans un repère orthonormé, la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;8]$ est représentée ci-dessous.



Calculer $\displaystyle\int_0^8 f(u)\,\mathrm{d}u$.

3 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x$. Déterminer graphiquement :

1. $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$

4 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 (1+u)^3\,\mathrm{d}u$
4. $\displaystyle\int_0^1 y\,\mathrm{e}^{y^2+1}\,\mathrm{d}y$
5. $\displaystyle\int_4^{25} \frac{5}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$

5 On note I l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{x+2}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$.
2. En déduire la valeur exacte de I.

6 On note I l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{x+3}\,\mathrm{d}x$.

1. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à $[0;1]$, $\dfrac{1-x}{x+3} = a + \dfrac{b}{x+3}$.
2. En déduire la valeur exacte de I.

7 Comparer, sans les calculer, les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

8 Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer que la fonction $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$ est primitive de f sur $[0;+\infty[$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$ et la courbe représentative de f.

9 On considère la surface comprise entre les droites d'équation $y = x$, $x = 0$, $x = 1$ et la parabole d'équation $y = x^2$. Dessiner cette surface et donner la valeur exacte de son aire en unités d'aire.

10 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^3 (2t^2+1)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-1}^2 (1+u)^2\,\mathrm{d}u$
4. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3y}\,\mathrm{d}y$
5. $\displaystyle\int_4^{25} \frac{5}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^5+1)\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_{10}^{12} \frac{2x}{x^2-8}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int_1^2 6x(x^2+4)^3\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x$

11 En intégrant par parties, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{(2+x)^3}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,\mathrm{e}^{4+5x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 2x^3\,\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^{14} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

12 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+1}$ et $g(t) = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^t+1)^2}$.

1. Démontrer que pour tout réel t, on a
$$g(t) = 1 - \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1} - \frac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

13 Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

1. Calculer $f'(x)$ puis en déduire $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.
2. On pose $J = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. À l'aide d'une IPP, exprimer $I + J$ en fonction de J.
3. En déduire la valeur de J.

14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = t^3\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\pi}}$. Démontrer à l'aide d'une IPP que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi^2$$