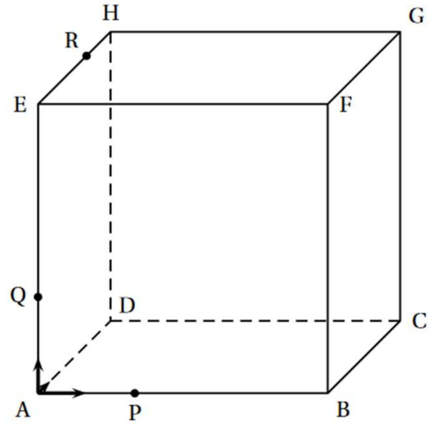
Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\,;\,0\,;\,0), F(6\,;\,0\,;\,6) \text{ et } R(0\,;\,4\,;\,6).$$

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

   b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR).

   c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

   c. Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points J(6 ; 4 ; 0) et K(6 ; 6 ; 2).

   a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

   b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

   c. Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

EXERCICE A - Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\,;\,-1\,;\,0), B(3\,;\,-1\,;\,2), C(0\,;\,4\,;\,1) \text{ et } S(0\,;\,1\,;\,4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

   b. Montrer que les coordonnées du point H sont H(2 ; 2 ; 3).

4. On rappelle que le volume V d'un tetraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
   Calculer le volume du tétraèdre SABC.

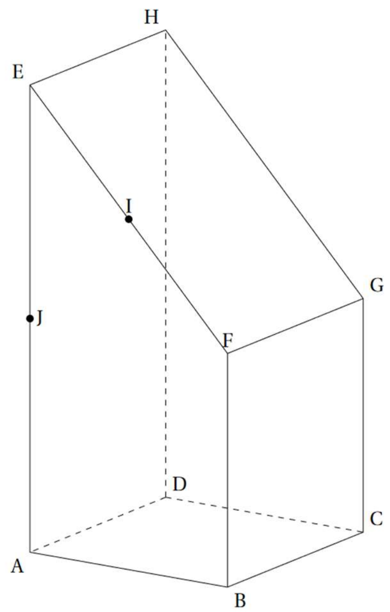
5. **a.** Calculer la longueur SA.

   b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.
   En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

Exercice 4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Les questions sont indépendantes.

On considère le prisme droit ABFEDCGH tel que AB = AD.
Sa base ABFE est un trapèze rectangle en A, vérifiant $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que :
$\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{k} = \overrightarrow{AJ}$



1. On donne les coordonnées de quatre vecteurs dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Lequel est un vecteur normal au plan (ABG) ?

   a. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

2. Parmi les droites suivantes, laquelle est parallèle à la droite (IJ) ?

   a. (DG) **b.** (BD) **c.** (AG) **d.** (FG)

3. Quels vecteurs forment une base de l'espace ?

   a. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CG}\right)$ **b.** $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\right)$ **c.** $\left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DG}\right)$ **d.** $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CE}\right)$

4. Une décomposition du vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme somme de plusieurs vecteurs **deux à deux orthogonaux** est :

   a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$ **b.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$
   c. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}$ **d.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

5. Le volume du prisme droit ABFEDCGH, est égal à :

   a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{8}{5}$ **c.** $\frac{3}{2}$ **d.** 2