BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2024

MATHÉMATIQUES

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : **16**

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 5 points

Partie A

Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_2(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

La courbe représentative de f_2, notée $\mathcal{C}_2$, est tracée dans un repère orthonormé sur l'ANNEXE à rendre avec la copie.

Aucune justification ni aucun calcul ne sont attendus dans cette partie.

1. Conjecturer les limites de f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Conjecturer le tableau de variations de f_2 à l'aide du graphique.
3. Soit T_2 la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente sur l'ANNEXE à rendre avec la copie, puis en conjecturer une équation par lecture graphique.
4. Sur l'ANNEXE à rendre avec la copie, hachurer un domaine dont l'aire est donnée par l'intégrale

$$\int_{-2}^{6} f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie B

Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = (x+m)\mathrm{e}^{-x}$$

et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On admet que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f'_m sa dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'_m(x) = (-x-m+1)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de f_m sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Pour tout réel m, on note T_m la tangente à la courbe $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0.
   Démontrer que T_m a pour équation réduite $y = (1-m)x + m$.
   (b) Démontrer que toutes les droites T_m passent par un même point dont on précisera les coordonnées.
5. Étudier le signe de $f_m(x)$ pour tout réel x.
6. On admet que la fonction F_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_2(x) = -(x+3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer, en fonction de x, l'expression de

$$\int_{-2}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire la valeur de

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-2}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 2 — 5 points

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : " le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques " ;
- T : " le test est positif " ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0{,}2625$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4. (a) Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.
   (b) On définit l'évènement E : ń le test fournit un résultat erroné ż.
   Démontrer que $p(E) = 0{,}0625$.

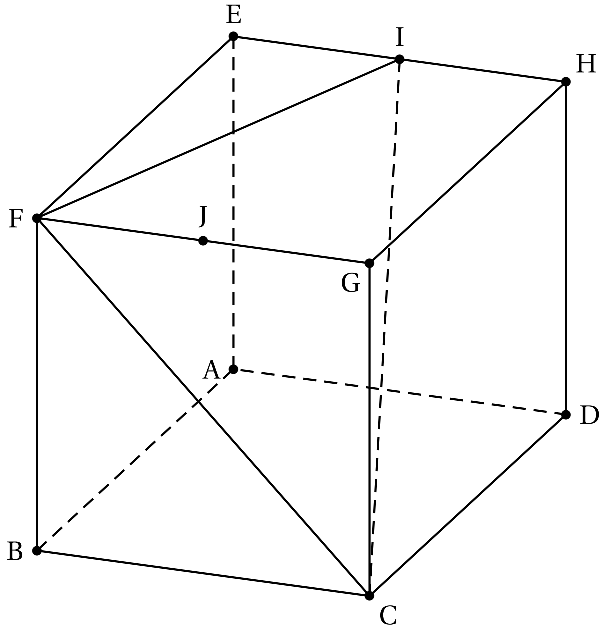
Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.
   (b) Calculer $P(X = 7)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à $0,95$?

EXERCICE 3 — 5 points

On considère le cube ABCDEFGH.
On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$ dans ce repère.



1. (a) Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.
   (b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).
   (c) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.
2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   (b) Démontrer que le point $K\left(\frac{7}{9}\,;\ \frac{5}{9}\,;\ \frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).
   (c) Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.
3. On considère la pyramide GCFI.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3}\times b\times h,$$

   où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   (a) Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.
   (b) En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.

EXERCICE 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
b. la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
c. la suite (u_n) n'a pas de limite.
d. la suite (u_n) converge.

✧✧✧

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = \mathrm{e}^{-2v_n} + 2.$$

2. Soit a un nombre réel strictement positif. On a $v_0 = \ln(a)$.

a. $w_0 = \dfrac{1}{a^2} + 2$
b. $w_0 = \dfrac{1}{a^2 + 2}$
c. $w_0 = -2a + 2$
d. $w_0 = \dfrac{1}{-2a} + 2$

3. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :

a. décroissante et majorée par 3.
b. décroissante et minorée par 2 .
c. croissante et majorée par 3 .
d. croissante et minorée par 2.

4. On considère la suite (a_n) ainsi définie :

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on a :

a. $a_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 2$
b. $a_n = -\dfrac{2}{3^n} + 4$
c. $a_n = 4 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
d. $a_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{8n}{3}$

5. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On peut affirmer que :

a. la suite (b_n) est croissante.
b. la suite (b_n) est décroissante.
c. la suite (b_n) n'est pas monotone.
d. le sens de variation de la suite (b_n) dépend de b_0.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE