I - Formule du binôme de Newton

Propriété 1 : binôme de Newton

Pour tous $u \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

Remarque

Cette formule était connue bien avant Newton par les mathématiciens indiens, arabes et perses dès le Xème siècle. En revanche, Newton généralisa cette identité à des exposants non entiers au XVIIème siècle.

Démonstration : par récurrence sur n.

— Initialisation : L'égalité est vraie pour $n = 0$, en effet si u et v sont des complexes alors $(u+v)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^{0-k} v^k = \binom{0}{0} u^0 v^0 = 1$.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, u et v deux complexes. Supposons l'égalité vérifiée pour n. Alors :

$$\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= (u+v)(u+v)^n \\
&= (u+v)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= u\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k + v\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k \text{ en développant} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n+1-k} v^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n+1-k} v^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{n+1-k} v^k \text{ en réindexant la somme} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^{n+1-k} v^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^{n+1-k} v^k + \binom{n}{0} u^{n+1} v^0 + \binom{n}{n} u^0 v^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) u^{n+1-k} v^k + \binom{n+1}{0} u^{n+1} v^0 + \binom{n+1}{n+1} u^0 v^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^{n+1-k} v^k + \binom{n+1}{0} u^{n+1} v^0 + \binom{n+1}{n+1} u^0 v^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k
\end{aligned}$$

— Conclusion : Par récurrence, l'égalité est donc vérifiée pour tout entier naturel n.

Exemples

— $(2+i)^3 = \binom{3}{0}2^3 i^0 + \binom{3}{1}2^2 i^1 + \binom{3}{2}2^1 i^2 + \binom{3}{3}2^0 i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$

— $(1-i)^5 = \binom{5}{0}1^5 i^0 - \binom{5}{1}1^4 i^1 + \binom{5}{2}1^3 i^2 - \binom{5}{3}1^2 i^3 + \binom{5}{4}1^1 i^4 - \binom{5}{5}1^0 i^5 = 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i = -4 + 4i$

II - Retour sur les équations polynômiales de degré 2

Je rappelle le résultat déjà étudié au début de l'année : une équation polynômiale de degré 2 à coefficients réels possède toujours des racines complexes.

Propriété 2 : Résolution d'un trinôme de degré 2

a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$. L'équation complexe $az^2 + bz + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, admet :

— Deux solutions réelles si $\Delta > 0$, données par

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Une solution réelle si $\Delta = 0$, donnée par

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

— Deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$, données par

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1}$$

Propriété 3 : Factorisation d'un trinôme de degré 2

a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$. On note z_1 et z_2 les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec éventuellement $z_1 = z_2$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Démonstration : La démonstration de la propriété 2 étudiée en début d'année nous donne cette factorisation.

Exemples

Considérons l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$. Son discriminant est $\Delta = -16$ et ses racines sont $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 1 + 2i$. D'après la propriété, on peut factoriser l'expression comme ceci $z^2 - 2z + 5 = (z - (1 - 2i))(z - (1 + 2i))$.

III - Factorisation des polynômes

Définition : Équation polynômiale

Soit n un entier naturel et soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$.

On appelle **fonction polynômiale de degré** n la fonction

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

L'équation $P(z) = 0$ est une **équation polynômiale de degré** n.

Lemme : factorisation de $z^n - \alpha^n$

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors pour tout entier naturel n non nul,

$$z^n - \alpha^n = (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} \alpha^k = (z - \alpha)(z^{n-1} + z^{n-2}\alpha + \ldots + z\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1})$$

Remarque

En particulier, $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1)$

Démonstration : Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En développant et en remarquant que les termes s'annulent deux à deux sauf le premier et le dernier,

$$\begin{aligned}
(z-\alpha)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}\alpha^k &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}\alpha^k}_{(1)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}\alpha^{k+1}}_{(2)} \\
&= \underbrace{z^n + \cancel{z^{n-1}\alpha} + \cancel{\ldots} + \cancel{z\alpha^{n-1}}}_{(1)} \underbrace{- \cancel{z^{n-1}\alpha} - \cancel{\ldots} - \cancel{z\alpha^{n-1}} - \alpha^n}_{(2)} \\
&= z^n - \alpha^n
\end{aligned}$$

Propriété 3 : factorisation par $z - \alpha$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(z) = 0$ une équation polynômiale de degré n.

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors il existe une fonction polynômiale Q de degré $n-1$ telle que pour tout complexe z,

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z)$$

On dit aussi que P est **factorisable** par $z - \alpha$.

Démonstration : Soit la fonction polynômiale $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où les $n+1$ coefficients a_0, a_1, ..., a_n sont réels, $a_n \neq 0$, et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
P(z) &= P(z) - P(\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (z^k - \alpha^k) \\
&= (z-\alpha)\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{l=0}^{k-1} z^{k-1-l}\alpha^l\right)}_{Q(z)} \quad \text{d'après le lemme précédent} \\
&= (z-\alpha)Q(z)
\end{aligned}$$

Et puisque $a_n \neq 0$, Q est un polynôme de degré $n-1$.

Exemples

— 1 est racine de $P(z) = z^3 - 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$$

— $P(z) = z^2 - 4$ est factorisable par $z - 2$ puisque pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = (z-2)(z+2)$$

Propriété 4 : nombre de racines

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si P est un polynôme non nul de degré n, alors il admet au plus n racines distinctes.

Démonstration : Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition "un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes". Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— *Initialisation :* Un polynôme P de degré 0 non nul n'a pas de racine. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Soit P un polynôme de degré $n+1$.

- Si P n'a pas de racine, alors on a bien $0 < n+1$;
- Si P a une racine α, alors d'après la propriété 3 il existe un polynôme Q de degré n tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, Q a au plus n racines, donc P en possède au plus $n+1$.

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

— *Conclusion :* Par récurrence, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$ de degré 3. On vérifie que $P(2) = 0$ autrement dit, 2 est une racine de P. Donc P se factorise par $z-2$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2)(z^2+1)$. On trouve exactement trois racines qui sont 2, i et $-i$.

Méthode : factoriser un polynôme dont une racine est connue

Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 4z^2 - z + 2$ dont une racine est 2.

1. On vérifie que $P(2) = 0$.
2. Puisque $P(2) = 0$, d'après la propriété 3, P est factorisable par $z-2$. On cherche donc un polynôme Q de degré 3 de la forme $Q(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ tel que pour tout complexe z, $P(z) = (z-2)Q(z)$.

- **Méthode par identification des coefficients**

On a donc $P(z) = (z-2)(az^3 + bz^2 + cz + d)$. En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} P(z) &= az^4 + bz^3 + cz^2 + dz - 2az - 2bz^2 - 2cz - 2d \\ &= az^4 + (b-2a)z^3 + (c-2b)z^2 + (d-2c)z - 2d \end{aligned}$$

On identifie directement que $a = 1$ et $d = -1$. En identifiant les coefficients des termes de degré 2 et 3, on est amené à résoudre le système $\begin{cases} b-2 &= 0 \\ c-2b &= -4 \\ -1-2c &= -1 \end{cases}$ dont les solutions sont $b = 2$ et $c = 0$.

$$\text{Ainsi } \boxed{P(z) = (z-2)(z^3 + 2z^2 - 1)}$$

- **Méthode par division euclidienne**

z^4-4z^2-z+2	$z-2$
z^4-2z^3	z^3+2z^2-1
$2z^3-4z^2-z+2$	
$2z^3-4z^2$	
$-z+2$	
$-z+2$	
0	

$$\text{Ainsi } \boxed{P(z) = (z-2)(z^3 + 2z^2 - 1)}$$