Ex. 1 — Calculer, à l'aide du binôme de Newton, la forme algébrique des complexes :

1. $(1-i)^3$
2. $(-2i)^5$
3. $(2+i)^4$
4. $(2-2i)^5$

Ex. 2 — Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}$.

1. $P(z) = z^2 + 4$
2. $Q(z) = z^2 - 6z + 25$
3. $R(z) = 2z^2 + 2z + 1$
4. $S(z) = 3z^2 + 5z - 2$

Ex. 3 — Écrire chacun des polynômes suivants sous la forme $z^n - \alpha^n$ puis les factoriser.

1. $P(z) = z^3 + 1$
2. $P(z) = z^3 - 8$
3. $P(z) = z^3 + i$
4. $P(z) = z^3 + 8i$
5. $P(z) = z^5 - 32i$

Ex. 4 — Soit le polynôme $Q(z) = z^3 - 27$. Factoriser Q puis en déduire les solutions de l'équations $Q(z) = 0$.

Ex. 5 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $8z^3 - 1 = 0$.

Ex. 6 — Soit le polynôme $P(z) = z^3 + 6z^2 + 13z + 10$. Calculer $P(-2)$ puis en déduire une factorisation de $P(z)$.

Ex. 7 — Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (1+i)z^2 + z - 1 - i$. Calculer $P(i)$ puis en déduire une factorisation de $P(z)$.

Ex. 8 — Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$. Montrer que 8 est une racine de P puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Ex. 9 — Soit le polynôme $P(z) = z^3 + (-6+i)z^2 + (13-6i)z + 13i$. Calculer $P(-i)$ puis en déduire une factorisation de $P(z)$ et enfin ses racines.

Ex. 10 — Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 5z^3 + 7z^2 - 5z + 6$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.
2. Montrer que i est une racine de P.
3. En déduire une autre racine puis une factorisation de P.

Ex. 11 — Soient a, b et c trois complexes distincts. On considère le polynôme P définie dans $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = \frac{(z-a)(z-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(z-b)(z-c)}{(a-c)(a-b)} + \frac{(z-a)(z-c)}{(b-a)(b-c)}$$

1. Quel est le degré de P ? En déduire le nombre maximal de racines.
2. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.
3. On considère le polynôme Q défini par $Q(z) = P(z) - 1$. Démontrer que Q admet trois racines distinctes et en déduire une expression simplifiée de P.

Ex. 12 — Soit le polynôme $P(z) = 2z^4 + z^3 + 9z^2 + 3z + 9$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2+3)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Ex. 13 — Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 2z^2 - (4+4i)z - 16 + 16i$.

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une unique solution réelle notée α et une unique solution imaginaire pure notée β.
2. Déterminer le complexe γ tel que $P(z) = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$.

Ex. 14 — Soit β tel que $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\left(1 - \cos(2\beta)\right)z + 2\left(1 - \cos(2\beta)\right) = 0$

Ex. 15 — On considère l'équation polynômiale (E) : $z^4 + 5z^3 - 4z^2 + 5z + 1 = 0$.

1. 0 est-il solution de (E) ?
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et posons $Z = z + \dfrac{1}{z}$. Démontrer que z est racine de (E) si et seulement si Z est solution de $Z^2 + 5Z - 6 = 0$.
3. Résoudre (E).
4. Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et l'équation (E') : $z^4 + az^3 + bz^2 + kaz + k^2 = 0$.
   a) Montrer que 0 n'est pas solution de (E').
   b) Montrer que (E') équivaut à $z^2 + az + b + \dfrac{ka}{z} + \dfrac{k^2}{z^2} = 0$.
5. On pose $Z = z + \dfrac{k}{z}$
   a) Calculer Z^2 et en déduire une équation du second degré dont Z est solution.
   b) Résoudre l'équation $z^4 - 3z^3 - 4z^2 - 6z + 4 = 0$.

Ex. 16 — Formules de Viète

1. Cas $n = 3$. Soit le polynôme $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ à coefficients réels et z_1, z_2, z_3 ses trois racines (éventuellement confondues).
   a) Factoriser P en produit de facteurs de degré 1.
   b) Montrer que $z_1 + z_2 + z_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}$ et $z_1z_2z_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}$.
2. Cas $n = 4$. Soit le polynôme de degré 4 à coefficients réels $P(z) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ et z_1, z_2, z_3, z_4 ses quatre racines (éventuellement confondues). Montrer que $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\dfrac{a_3}{a_4}$ et $z_1z_2z_3z_4 = \dfrac{a_0}{a_4}$.
3. Cas général. SOit le polynôme de degré n à coefficients réels $P(z) = a_nz^n + \ldots + a_0$ et z_1, …, z_n ses n racines (éventuellement confondues). Montrer que $z_1 + \ldots + z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ et $z_1 \ldots z_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}$.