Le but de ce problème est de démontrer que le nombre $\ln(2)$ est un réel irrationnel.
(D'après RMS 130-3)

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\ln(2) = \dfrac{a}{b}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $d_n \coloneqq \operatorname{ppcm}(1, \ldots, n)$.
   (a) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{1+x} - (-1)^n \times \dfrac{1-(-x)^n}{1+x} = \dfrac{x^n}{1+x}$.
   (b) Montrer qu'il existe $c_n \in \mathbb{Z}$ tel que
   $$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \ln(2) + \frac{c_n}{d_n}.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et P_n la fonction réelle définie par $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}\left\{x^n(1-x)^n\right\}^{(n)}$.
   (a) Montrer que P_n est une fonction polynomiale à coefficients entiers.
   (b) Montrer que le degré de P_n est n.
   (c) Montrer qu'il existe $A_n \in \mathbb{Z}$ tel que
   $$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{A_n}{b \times d_n}.$$
   (d) Soit la fonction réelle $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(1-x)^n$. Montrer que
   $$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\left[k!\frac{f_n^{(n-k-1)}(x)}{(1+x)^{k+1}}\right]_0^1 + n!\int_0^1 \frac{f_n(x)}{(1+x)^{k+1}}\,\mathrm{d}x.$$
   (e) Soient un polynôme P à coefficients réels et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq \deg(P)$. On dit que P admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de multiplicité p si P est divisible par $(X-\alpha)^p$ et P n'est pas divisible par $(X-\alpha)^{p+1}$. Montrer que pour tout entier $k \leq p$ on a $P^{(k)}(\alpha) = 0$.
   (f) En déduire que
   $$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = n!\int_0^1 \frac{f_n(x)}{(1+x)^{k+1}}\,\mathrm{d}x.$$
   (g) Montrer que $A_n \geq 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Si p est un diviseur premier de n, on note $\nu_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n.
   On admet le **théorème des nombres premiers** : la suite $\left(\pi_n \dfrac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1, autrement dit :
   $$\forall \varepsilon > 1,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\varepsilon,\ \pi_n \leq \varepsilon \frac{n}{\ln(n)}.$$
   (a) Montrer qu'il existe un entier $j \in [\![1; n]\!]$ tel que $p^{\nu_p(d_n)}$ divise j et en déduire que $p^{\nu_p(d_n)} \leq n$.
   (b) Montrer que $\ln(d_n) \leq \pi_n \ln(n)$.
   (c) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d_n \leq 3^n$.
4. Montrer que pour tout réel x, $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.
5. En déduire que pour tout $n \geq N$, où N est défini dans la question 3.(c),
   $$1 \leq b \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$
6. Conclure.