Exercices

Loi des grands nombres

1 Sujet 0 (2024)

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

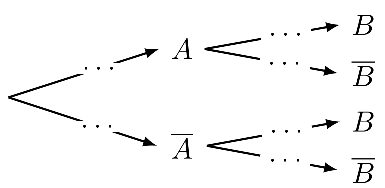
Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.
On considère que :

- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X. Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
5. On souhaite déterminer la variance de X.
   (a) Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.
   (b) Montrer que la variance de X vaut 0,57.
   (c) A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.
Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.
On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Soit n un nombre entier strictement positif.

   Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.

   On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.

   On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$

   (a) Quelle est l'espérance de M_n ?

(b) Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?

(c) Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6,3 \leqslant M_n \leqslant 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75 .

2 Un concours de chant-cuisine-maths est organisé au lycée Jacques Brel à la fin de l'année.
La première épreuve consiste à chanter une chanson choisie par le candidat devant un jury et celui-ci attribue **un ou deux points**. La deuxième épreuve consiste à proposer au jury une préparation culinaire puis de se voir attribuer un **bonus d'un point** ou un **malus d'un point**.
On considère que :

- la probabilité de réussir l'épreuve de chant est de 0,2 ;
- si l'épreuve de chant est réussie, le jury est plus enclin à donner un bonus lors de la seconde épreuve : la probabilité de réussir l'épreuve de cuisine est alors de 0,6.
- à l'inverse si l'épreuve de chant est ratée, le jury donne un malus à l'épreuve de cuisine avec une probabilité de 0,7.

On note A l'évènement "l'épreuve de chant est réussie" et B l'évènement "l'épreuve de cuisine est réussie". On désigne par X_1 la variable aléatoire égale au nombre de points attribués à l'issue de l'épreuve de chant et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de points attribués à l'issue de l'épreuve de cuisine.

1. (a) Modéliser l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Calculer la probabilité qu'un candidat réussisse les deux épreuves.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement B.
   (d) Un candidat a réussi son épreuve de cuisine. Quelle est la probabilité que l'épreuve de chant se soit mal passée ?
2. (a) Donner les lois de probabilité de X_1 et X_2 sous la forme de tableaux.
   (b) Calculer les espérances des variables aléatoires X_1 et X_2.
   (c) Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2$. Que désigne X dans le contexte de l'exercice ? Déduire de la question précédente son espérance puis interpréter ce résultat.
3. (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Donner la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.
   (c) Calculer $V(X)$.
   (d) Justifier par le calcul que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
4. La dernière épreuve du concours est un QCM de mathématiques composé de dix questions indépendantes ; une bonne réponse vaut un point et une mauvaise réponse vaut zéro point. Les candidats, épuisés après les deux premières épreuves, répondent au hasard et on considère que la probabilité de répondre correctement à une question est de $\frac{1}{5}$.
   On note Y la variable aléatoire égale à la note totale d'un candidat à l'issue de l'épreuve de mathématiques.
   (a) Quelle est la loi de probabilité de Y ? Justifier et donner ses paramètres.
   (b) Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne au moins un point ?
   (c) Calculer l'espérance et la variance de Y.
5. On considère la variable aléatoire $S = X + Y$ égale au nombre de points d'un candidat à l'issue du concours. On considère que X et Y sont indépendantes.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de S.
   Pour i entier variant de 1 à n, on note S_i la variable aléatoire qui, au i-ème candidat, associe la note totale obtenue à l'issue des trois épreuves.
   On admet que les variables aléatoires $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont identiques à S et indépendantes.
   On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :
   $$M_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$$
   (b) Calculer l'espérance et la variance de M_n.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $P(|M_n - 2,92| \geq 2) \leq \frac{0,7184}{n}$.
   (d) En déduire le nombre minimal de candidats pour que la probabilité que M_n soit compris strictement entre 0,92 et 4,92 soit supérieure à 0,9.