Exercices

Fonctions trigonométriques

1 Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation
$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2 Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation
$$\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\cos(x) = -\frac{1}{2}.$$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$\cos(x) \leq -\frac{1}{2}.$$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$\cos(x)\sin(x) < 0.$$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\cos(2x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2.$$

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\cos(2x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 3.$$

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\cos(x)^2 = 1.$$

9 Résoudre dans $[\pi;\pi]$ l'équation
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10 Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation
$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}.$$

11 Résoudre dans $[-2\pi;2\pi]$ l'équation
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right).$$

12 Résoudre dans $[-2\pi;2\pi]$ l'équation
$$2\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = -1.$$

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f et conjecturer une éventuelle périodicité et parité. Démontrer ces conjectures.

14 Même exercice avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(4x) - \sin^2(x)$.

15 Soit la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = \cos(x)\sin(x)$.

1. Montrer que $f'(x) = 2\left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0;\pi]$ puis le tableau de variation de la fonction f.

16 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos^2(x) - 6\cos(x)$.

1. Montrer que f est périodique. Que peut-on en déduire quant à l'intervalle d'étude ?
2. Dresser le tableau de variations de f sur un intervalle bien choisi puis en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

17 Même exercice avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(x) + \sin^2(x)$.

18 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}$.

1. Montrer que f est 2π-périodique.
2. Montrer que f est paire.
3. Déterminer les variations de f sur $[0;\pi]$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution sur $[\pi;2\pi]$.

19 On cherche à démontrer l'inégalité de Huygens :
$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[,\ 2\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \geq 3x.$$

1. On considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\sin(x) + \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} - 3x$. Calculer $f'(x)$.
   (a) On considère la fonction polynôme définie sur $]0;1]$ par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Montrer que $P(x) = (x-1)^2(2x+1)$.
   (b) Déterminer le signe de $P(x)$ sur l'intervalle $]0;1]$.
2. Vérifier que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{P\big(\cos(x)\big)}{\cos^2(x)}$.
3. Étudier les variations de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.
4. Prouver finalement l'inégalité.