Échauffement

Chapitre XII - Loi des grands nombres

1 Deux amis décident d'aller au cinéma. Au guichet, ils ont le choix entre trois formules différentes.

- Formule A : 12,10 € la place ;
- Formule B : une carte nominative de cinq places non utilisable le weekend à 32 € ;
- Formule C : une carte nominative de cinq places valable tous les jours à 41,50 €.

Ils choisissent chacun une formule de façon équiprobable et on note X la variable aléatoire qui associe au choix d'une formule la somme totale payée par les deux amis. Déterminer la loi de probabilité de X, calculer son espérance puis interpréter le résultat. Calculer ensuite sa variance.

2 Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

x_i	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

3 Z est une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité donnée dans le tableau ci-dessous :

z_i	0	2	4
$P(Z=z_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{5}{32}$

Calculer l'espérance et l'écart-type de Z.

4 À quel jeu est-il préférable de jouer ?

	Jeu 1		Jeu 2	
Gain	-2	5	-1	3
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

5 Dans la population française, 6 % des personnes sont donneurs universels, c'est à dire que leur groupe sanguin est O négatif.
60 donneurs se présentent au centre de transfusion pendant une semaine. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de donneurs universels parmi les 60 personnes qui se présentent.
Justifier que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres, calculer son espérance et enfin interpréter le résultat dans e contexte de l'exercice. Quelle est sa variance ?

6 Une entreprise fabrique en grande quantité des bijoux fantaisies dont 5% sont défectueux et donc invendables. On prélève au hasard 60 bijoux dans la production journalière de l'entreprise. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 bijoux.
On considère la variable aléatoire X qui indique le nombre de bijoux invendables. Calculer son espérance puis interpréter le résultat. Calculer sa variance.

7 Dans une station de ski, un usager peut choisir l'option coupe-file qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.
On admet que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112. On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.
Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

8 Dans un supermarché, Dimitri prend au hasard une boisson et un sandwich. X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le prix, en euro, de la boisson (resp. du sandwich). On suppose ces deux variables indépendantes.
Voici les lois de probabilités de X et Y :

a	1,5	2	2,5
$P(X=a)$	0,2	0,5	0,3

b	4,5	5	5,5
$P(Y=b)$	0,4	0,4	0,2

Que représente la variable aléatoire $X+Y$? Établir sa loi de probabilité.

9 Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 2. Calculer l'espérance et la variance des variables suivantes :
1. $Y = 2X$ 2. $Z = 3X + 1$ 3. $T = -X$
4. $U = 2(X-1)$

10 Idem avec $E(X) = -2$ et $V(X) = \frac{1}{2}$.
1. $Y = \frac{X}{2}$ 2. $Z = \frac{X+5}{3}$ 3. $T = -X$
4. $U = \frac{2(X-1)}{3}$

11 Soient X et Y deux variables aléatoires suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(5;0,1)$ et $\mathcal{B}(10;0,1)$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de $X+Y$?
2. Calculer $E(X+Y)$.

12 Soit X une variables aléatoire telle que $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$. Soit Y une variable aléatoire telle que $E(Y) = -2$ et $V(Y) = 1$.
Calculer si possible l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

1. $Z = -2X$ 3. $U = Z + 1$
2. $T = X + Y$ 4. $V = \frac{Z}{2}$

13 Un jeu de plateau se joue avec deux dés : un cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé dodécaédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 12. Pour avancer sur la piste de jeu, il faut lancer les deux dés. On avance alors d'autant de cases que la somme des numéros indiqués par les deux dés.
On appelle X la variable aléatoire qui attribue au lancer du dé cubique le numéro de la face obtenue, Y celle qui

attribue le numéro de la face obtenue au lancer du dé dodécaédrique et Z la somme de X et Y.

1. Déterminer la loi de X, puis celle de Y.
2. Déterminer $E(Z)$.
3. Justifier qu'on peut considérer les deux variables X et Y comme indépendantes.
4. En déduire $V(Z)$.

Une règle est ajoutée en cours de jeu : si on obtient un total supérieur à 15, on a droit à un déplacement bonus de deux cases.

5. Quelle est la probabilité d'avoir ce bonus ?
6. Soit n le nombre de lancers de ces deux dés. On appelle B_i la variable aléatoire qui associe 1 si, au i-ème lancer, un joueur a eu le bonus, 0 s'il ne l'a pas eu, et S_n le nombre total de bonus obtenus. Exprimer $E(S_n)$ en fonction de n.
7. On appelle Z_n le total des points obtenus au bout de n lancers dés deux dés. Calculer $E(Z_n + 2S_n)$.
8. Le parcours comporte 300 cases. Quel nombre moyen de lancers de dés faut-il faire pour terminer le parcours ?

14 On considère une variable aléatoire X. Exprimer chacun des évènements sous la forme $\{|X-a| \geq \delta\}$.

1. $\{X-2 \geq 2 \text{ ou } X-2 \leq -2\}$
2. $\{X-a \geq 3 \text{ ou } X-a \leq -3\}$
3. $\{X \geq 6 \text{ ou } X \leq 0\}$
4. $\{X \geq 5 \text{ ou } X \leq 1\}$

15 On considère une variable aléatoire X. Exprimer l'évènement complémentaire de chacun des évènements en utilisant des valeurs absolues.

1. $\{-2 < X-1 < 2\}$
2. $\{1 < X < 5\}$
3. $\{1+X > 2 > -1+X\}$

16 On lance quatre fois une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. À quelles valeurs de X correspondent les évènements :
   (a) $\{|X-2| \geq 2\}$
   (b) $\{|X-1| \leq 1\}$

17 Soit X une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 10.

1. Donner une majoration de $P\big(|X-50| \geq 10\big)$.
2. En déduire une minoration de $P\big(40 < X < 60\big)$.

18 Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 10$ et $V(X) = 16$.

1. Donner une majoration de $P\big(|X - E(X)| \geq 4\big)$.
2. Donner une majoration de $P\big(|X-10| \geq 10\big)$.

19 Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs positives telle que $E(X) = 10$ et $V(X) = 5$.

1. Donner une majoration de $P\big(|X - E(X)| \geq 10\big)$.
2. En déduire une majoration de $P\big(X \geq 20\big)$.

20 Soit X une variable aléatoire. Calculer :

1. $P\big(|X - E(X)| \geq \sigma(X)\big)$
2. $P\big(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)\big)$
3. $P\big(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X)\big)$

21 Soit X une variable aléatoire d'espérance 12 et de variance 40.

1. Déterminer la valeur δ telle que $\dfrac{V(X)}{\delta^2} = 0,4$.
2. En déduire que $P\big(|X-12| \geq 10\big) \leq 0,4$.
3. En déduire que la probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle $]2, 22[$ est d'au moins $0,6$.

22 On effectue n tirages avec remise d'une carte d'un jeu de 52 cartes. Pour $1 \leq i \leq n$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on obtient un pique au i-ème tirage et 0 sinon.

1. Pour $1 \leq i \leq n$, donner l'espérance et la variance de X_i.
2. En déduire l'espérance et la variance de la moyenne empirique M_n.
3. Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité de s'écarter de l'espérance de plus de 0,1 oit inférieure à 0,05 ?

23 On lance cinq fois une pièce non truquée. Pour $1 \leq i \leq 5$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on obtient Pile au i-ème lancer et 0 sinon. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_5$.

1. Pour tout $1 \leq i \leq 5$, calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2. En déduire $E(S_5)$ et $V(S_5)$.
3. Justifier que S_5 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. Montrer que $P\big(|S_5 - 2,5| \geq 2\big) \leq 0,3125$ et interpréter ce résultat.

On note $M_5 = \dfrac{S_5}{5}$.

5. Déterminer $E(M_5)$ et $V(M_5)$.
6. Montrer que $P\big(|M_5 - 0,5| \geq 0,4\big) \leq 0,3125$ et interpréter ce résultat.

24 Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour être sûr à 99 % que la proportion de Pile est compris entre 0,45 et 0,55 ?