I - Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1 : Nombre complexe

On appelle **nombre complexe** un nombre de la forme $a + ib$ où a et b sont de réels et i est un nombre "imaginaire" vérifiant $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Exemples

$1 + i$ ou $-2 + \frac{3}{2}i$ ou $-2i$ ou $\pi + \sqrt{2}i$ ou 4 sont des nombres complexes.

Définition 2 : Forme algébrique

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. L'écriture $z = a + ib$ où a et b sont réels est la **forme algébrique** de z.
2. — a est la **partie réelle**, notée $\Re(z)$;
   — b est la **partie imaginaire**, notée $\Im(z)$.

Remarques

1. La forme algébrique d'un complexe est unique !
2. Les nombres réels sont des nombres complexes, ils ont une partie imaginaire nulle.
3. Un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé **imaginaire pur**, par exemple $-3i$.

Propriété 1 : Calcul dans $\mathbb{C}$

En gardant en tête que $i^2 = -1$, l'addition et la multiplication fonctionnent comme chez les réels.

Exemples

1. Somme de complexes : $(3 - i) + (-2 + 5i) = 3 - 2 - i + 5i = 1 + 4i$
2. Produit d'un réel et d'un complexe : $5 \times (2 + i) = 10 + 5i$
3. Produit de deux complexes : $2i \times (i - 6) = 2i^2 - 2i \times 6 = -2 - 12i$

Définition 3 : Conjugué d'un complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = a + ib$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.

Exemples

$\overline{3 - 5i} = 3 + 5i$ et $\overline{2i - 3} = -2i - 3$

Propriété 2 : Propriétés algébriques du conjugué

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Remarque

Si z est un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$:

1. $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\Re(z)$.
2. $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - i^2b^2 = a^2 + b^2$.

Notons que $z\overline{z} \in \mathbb{R}$, ce qui a une importance pour la méthode suivante.

Méthode : Forme algébrique d'un quotient

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient de complexes, on utilise l'égalité suivante :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

où z est un complexe non nul.

Exemple

Déterminons la forme algébrique du complexe $\dfrac{2-3i}{4-i}$:

$$\begin{aligned}\frac{2-3i}{4-i} &= \frac{2-3i}{4-i} \times \frac{4+i}{4+i}\\ &= \frac{(2-3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}\\ &= \frac{8-12i+2i-3i^2}{16-i^2}\\ &= \frac{11-10i}{17}\\ &= \frac{11}{17} - \frac{10}{17}i\end{aligned}$$

Propriété 3 : Conjugué d'un quotient

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$. Alors :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

II - Équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$

Lemme : Solutions de l'équation $z^2 = a$

Soit a un nombre réel non nul. L'équation $z^2 = a$ admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$:

1. Si $a > 0$, les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
2. So $a < 0$, les solutions sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$

Exemple

L'équation $z^2 = -9$ a pour solutions dans $\mathbb{C}$: $3i$ et $-3i$.

Propriété 4 : Résolution d'un trinôme de degré 2

a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$. L'équation complexe $az^2 + bz + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, admet :

— Deux solutions réelles si $\Delta > 0$, données par

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Une solution réelle si $\Delta = 0$, donnée par

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

— Deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$, données par

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1}$$

Exemple

L'équation $z^2 + 4z + 5 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$. Elle admet donc solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-4 + i\sqrt{4}}{2} = -2 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -2 - i$.

III - Représentation géométrique

Définition 4 : Plan complexe et affixe d'un point

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$.
À tout nombre complexe $z = a+ib$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ du plan complexe.

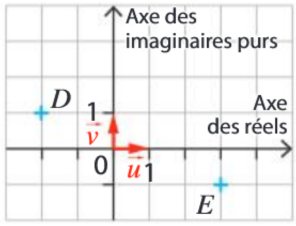
— M est le **point image** de z

— z est l'**affixe** de M

Exemple

— Le point D a pour affixe $-2+i$

— Le point image du complexe $3-i$ est le point E



Propriété 5 : Affixe du milieu d'un segment

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A+z_B}{2}$

Définition 5 : Affixe d'un vecteur

À tout nombre complexe $z=a+ib$ avec a et b réels, on associe le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ dans le plan complexe. On dit que :

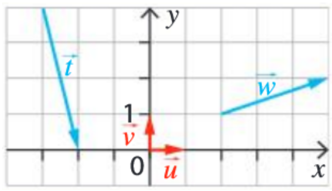
— $\vec{w}$ est le **vecteur image** de z

— z est l'**affixe** de $\vec{w}$

Exemple

— Le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $3+i$

— Le vecteur image du nombre complexe $1-4i$ est $\vec{t}$



Propriété 6 : Somme de vecteurs et multiplication par un scalaire

1. Soient A et B deux points du plan du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B. Alors
$$\overrightarrow{AB} \text{ a pour affixe } z_B-z_A$$
2. Soient $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z'. Alors
$$\vec{w}+\vec{w'} \text{ a pour affixe } z+z'$$
3. Soit $\vec{w}$ d'affixe z et $k\in\mathbb{R}$. Alors
$$k\vec{w} \text{ a pour affixe } kz$$