I - Qu'est-ce qu'une matrice ?

Définition 1 : Matrice, dimension et coefficients

Une **matrice** A est de **dimension** (ou taille, ou ordre) $n \times p$ est un tableau de nombres formé de n lignes et p colonnes.

Les nombres sont appelés **coefficients** et le coefficient de la matrice A situé en ligne i et en colonne j est noté $a_{i,j}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -6 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3 et $a_{1,1} = -1$, $a_{2,3} = 4$, $a_{1,2} = 5$.

Définition 2 : Quelques matrices particulières

1. Une matrice **carrée** est de dimension $n \times n$ autrement dit elle possède autant de lignes que de colonnes.
$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & -5 & 63 \\ -2 & 7 & 4,6 \\ -5,7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de dimension } 3 \times 3$$
2. Une matrice **ligne** est de dimension $1 \times n$ autrement dit elle n'est composée que d'une ligne.
$$N = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \text{ est de dimension } 1 \times 3$$
3. Une matrice **colonne** est de dimension $n \times 1$ autrement dit elle n'est composée que d'une colonne.
$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ est de dimension } 2 \times 1$$
4. Une matrice **nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont nuls.
$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est nulle et de dimension } 2 \times 3$$
5. Une matrice **identité** est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf la diagonale composée de 1.
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice identité de dimension } 3 \times 3$$

Exercice : Écrire la matrice $M = (m_{i,j})$ de dimension 4×3 dont les coefficients sont définis par $m_{i,j} = i(j+1)$ pour $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 3$.

Corrigé

$m_{1,1} = 1 \times (1+1) = 2$, $m_{1,2} = 1 \times (2+1) = 3$, ...etc et ainsi $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$.

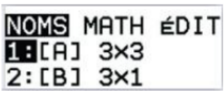
Exercice : Entrer dans la calculatrice la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 8 & 3 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$.

Méthode : Entrer une matrice dans la calculatrice

TI

Pour définir une matrice :

• on entre dans le menu matrice ;



• on choisit ÉDIT, on indique la dimension de la matrice et on entre ses éléments.

Pour utiliser une matrice :
on appuie sur le numéro de la matrice que l'on veut utiliser.

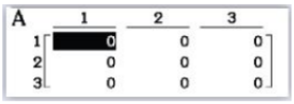
Casio

Pour définir une matrice :

• on entre dans le menu Exe-Mat ;

• on choisit le menu MAT/VCT en appuyant sur F3 ;

• on choisit la matrice A, on donne ses dimensions et on entre ses éléments.



Pour utiliser une matrice :

On appuie sur SHIFT 2 ALPHA X,θ,T pour utiliser la matrice A.

Définition 3 : matrices égales

Deux matrices A et B sont **égales** si elles ont même dimension et si les coefficients situés en même position sont égaux.

II - Opérations sur les matrices

Définition 4 : Somme de matrices

Pour additionner deux matrices **de même dimension**, on additionne les coefficients situés à la même place.

Les nombres sont appelés **coefficients** et le coefficient de la matrice A situé en ligne i et en colonne j est noté $a_{i,j}$.

<u>Exemple</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 20 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 32 \\ 3 & 13 & -11 \end{pmatrix}$.

Propriété 1 : Propriétés de la somme

Soient A, B C et 0 quatre matrices de même dimension, 0 est la matrice nulle. Alors :

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (l'ordre des opérations n'a pas d'importance)
3. $A + 0 = A$

Définition 5 : Multiplication par un réel

La multiplication d'une matrice A par un nombre réel k est la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient par k.

<u>Exemple</u> : $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $3A = \begin{pmatrix} 6 & 24 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $-3A = \begin{pmatrix} -6 & -24 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 2 : Propriétés de la multiplication par un réel

Soient A et B deux matrices de même dimension, k et k' sont deux réels.

1. $k(A+B) = kA + kB$
2. $(k+k')A = kA + k'A$
3. $k(k'A) = (kk')A$

Exercice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 9 \\ -10 & 11 & -12 \end{pmatrix}$. Calculer $A+2B$ puis effectuer le résultat à la calculatrice.

Corrigé

$$A+2B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 7 & -8 & 9 \\ -10 & 11 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -16 & 18 \\ -20 & 22 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -18 & 21 \\ -24 & 27 & -18 \end{pmatrix}.$$

Définition 6 : Multiplication d'une ligne par une colonne

Soit $L = (l_{ij})$ une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et $C = (c_{ij})$ une matrice colonne de dimension $n \times 1$. Le produit $L \times C$ est un nombre défini par :

$$l_{11} \times c_{11} + l_{12} \times c_{21} + \ldots + l_{1n} \times c_{n1}$$

Illustration :

$$\mathrm{L} \times \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} & \ldots & \ell_{1,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{n,1} \end{pmatrix} = \ell_{1,1} \times c_{1,1} + \ell_{1,2} \times c_{2,1} + \ldots + \ell_{1,n} \times c_{n,1}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + (-2) \times 2 + 6 \times 10 + 4 \times 5 = 76$$

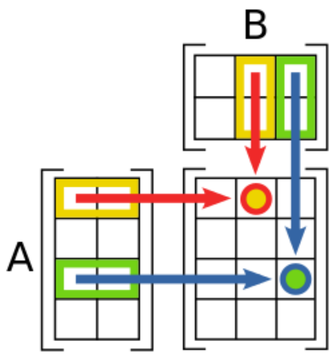
Définition 7 : Multiplication de matrices

Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice de dimension $p \times m$.

Le produit $A \times B$ est la matrice C de dimension $n \times m$ dont chaque coefficient c_{ij} est obtenu en multipliant la ligne i de A par la colonne j de B.

Remarque : Le produit de deux matrices n'est possible que si **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B**.

Illustration :



Exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 19 & 44 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Propriété 3 : Propriétés du produit de matrices

Soient A, B et C trois matrices telles que les opérations suivantes sont possibles. I est la matrice identité.

1. En général, $A \times B \neq B \times A$
2. $A(B+C) = AB + AC$
3. $(A+B)C = AC + BC$
4. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
5. $I \times A = A \times I = A$

Exercice : Calculer $A \times B$ à la main puis vérifier à la calculatrice.

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -5 \\ 1 & 8 & -6 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

Corrigé

1. La dimension de A est 1×3 et celle de B est 3×2. Le produit est possible et le résultat est une matrice de dimension 1×2.

$$AB = \begin{pmatrix} -2\times 3 + 6\times 8 + 5\times(-4) & -2\times(-5) + 6\times 1 + 5\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 11 \end{pmatrix}$$

2. La dimension de A est 3×3 et celle de B est 3×2. Le produit est possible et le résultat est une matrice de dimension 3×2.

$$AB = \begin{pmatrix} 62 & 21 \\ 91 & 9 \\ 8 & 23 \end{pmatrix}$$

III - Matrices inversibles

DÉFINITION 8 : MATRICES INVERSIBLES

Deux matrices carrées A et B de dimension $n \times n$sont dites **inverses** si $AB = BA = I_n$.

On note alors $A^{-1} = B$.

Remarque : Certaines matrices n'ont pas d'inverse. Celles qui en ont sont dites **inversibles**.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour inverse la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. En effet,

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

PROPRIÉTÉ 4 : INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE D'ORDRE 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels non tous nuls.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. De plus,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration : Posons $N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. Supposons que $ad - bc \neq 0$. En calculant le produit $A \times N$ on vérifie qu'on a $AN = (ad - bc)I_2$. On en déduit que A^{-1} existe et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \times N = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
2. Réciproquement, si A^{-1} existe alors

$$\begin{aligned} N &= N \times (AA^{-1}) \\ &= (NA) \times A^{-1} \\ &= (ad - bc)I_2 \times A^{-1} \\ &= (ad - bc)A^{-1} \end{aligned}$$

Puisque $N \neq 0_2$ on en déduit que $ad - bc \neq 0$.

Exercice : Déterminer à l'aide des touches 

et 

de la calculatrice l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé

On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}$.