Ex. 1 — Ces entiers sont-ils premiers ?
97 ; 323 ; 401 ; 527 ; 719 ; $6k+2$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 2 — Ces entiers sont-ils premiers ?

1. $A_n = 4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $B_n = n^2 - 6n + 5$ pour tout entier $n \geq 7$.
3. $C = 10^{2024} + 1$.

Ex. 3 —
1. Montrer que
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2).$$
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $n^3 - 27$ est-il premier ?
3. Existe-t-il des valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $n^6 - 27$ est premier ?

Ex. 4 — Montrer que tout nombre premier impair est congru à -1 ou 1 modulo 4.

Ex. 5 — Montrer que si la somme de deux entiers a et b est un nombre premier alors a et b sont premiers entre eux.

Ex. 6 — Soit n un entier naturel strictement supérieur à 3. Démontrer que si n et $5n-2$ sont des nombres premiers alors $5n+2$ n'est pas un nombre premier.

Ex. 7 — Décomposer le nombre 3546 en produit de facteurs premiers et déterminer la liste de ses diviseurs.

Ex. 8 — Par combien de zéros se termine le nombre 16384×15625 ?

Ex. 9 — Décomposer 1764 en produits de facteurs premiers. En déduire la valeur exacte de $\sqrt{1764}$.

Ex. 10 — En utilisant la décomposition en facteurs premiers, déterminer le PGCD des nombres a et b suivants :
a) $a = 1188$, $b = 1485$; b) $a = 3780$, $b = 3528$.

Ex. 11 — Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geq 1+n$.
   b) Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1+n$?

Ex. 12 — Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $n^{11} - n$ est divisible par 33.

Ex. 13 — Montrer que pour tout nombre entier naturel n, 7 divise $3^{6n} - 1$.

Ex. 14 — Soient deux entiers relatifs a et b et p un nombre premier. Montrer que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p\ [p]$.

Ex. 15 — Soit p un nombre premier impair. Montrer que si p divise $(p-1)! + 1$, alors p est un nombre premier.

1. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.
   a) Démontrer que $S(n) = (1+p)(1+q)$.
   b) Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? "Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$".
2. On suppose dans cette question que $n = p^k$, où p est un nombre premier et $k \geq 1$.
   a) Quels sont les diviseurs de n ?
   b) En déduire que $S_n = \dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$.
3. On suppose dans cette question que $n = p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.
   a) Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que m divise n si et seulement si il existe $0 \leq s \leq 13$ et $0 \leq t \leq 7$, tels que $m = p^s \times q^t$.
   b) Démontrer que $S_n = \dfrac{1-p^{14}}{1-p} \times \dfrac{1-q^8}{1-q}$.

Ex. 16 — Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$ où α et β sont deux entiers naturels. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n.

1. Montrer que $\beta(\alpha - 1) = 4$.
2. En déduire les valeurs possibles pour n.

Ex. 17 — Pour tout entier naturel n, on note $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers avec n compris entre 1 et n.

1. Montrer que si p est premier alors $\varphi(p) = p-1$.
2. Montrer que si p est premier alors $\varphi(p^2) = p(p-1)$.

Ex. 18 — Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.