Exercices

# Démonstration par récurrence

**1** $(u_n)$ est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$0 \leq u_n \leq 2$$

**2** $(u_n)$ est la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = 3 - 2^n$$

**3** $(u_n)$ est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = 2^{n+1} + 1$$

**4** $(u_n)$ est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$. Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{2}{2n+1}$$

**5** **Inégalité de Bernoulli**
$a$ est un réel strictement positif. Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

**6** Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_0 = 0,25$ et $v_{n+1} = 5v_n - 1$. Montrer que $(v_n)$ est constante.

**7** $(u_n)$ est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**8** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$. Montrer que pour tout entier naturel $n$,

$$v_n = n^2 + n - 1$$

**9** Soit la suite $(w_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul par $w_1 = 2$ et $w_{n+1} = w_n - \dfrac{1}{n^2 + n}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$w_n = \frac{n+1}{n}$$

**10** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**11** Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1^3 + \ldots + n^3 = (1 + \ldots + n)^2$$

**12** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**13** Démontrer que tout nombre entier $n \geq 24$ peut s'écrire sous la forme $n = 5a + 7b$ où $a$ et $b$ sont deux entiers.

**14** On considère la suite $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = 5u_n + 8$ pour tout entier naturel $n$.

1. Montrer par récurrence que $u_n = 3 \times 5^n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n + 2$ pour tout entier naturel $n$.
   (a) Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 5.
   (b) En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$, puis celle de $u_n$ en fonction de $n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**15** On considère la suite $(v_n)$ définie par $v_1 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} v_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ :

$$v_n = \frac{n}{3^n}$$

2. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)$.

**16** On considère la suite $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 0$ et telle que $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ pour tout entier naturel $n$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq n$.
3. En déduire que $(u_n)$ est croissante.
4. Soit la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 3.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = 3^n + n - 1$$