Chapitre II

Compléments sur la dérivation

I - FONCTION DÉRIVABLE ET FONCTION DÉRIVÉE

Dans ce chapitre f désigne une fonction définie sur D_f, partie de $\mathbb{R}$.

Définition : Nombre dérivé

Soit $a \in D_f$. On dit que f est **dérivable** en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie.
On note alors cette limite

$$f'(a)$$

On l'appelle **nombre dérivé** en a.

Remarque

De la même façon $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Propriété : Équation de la tangente

Soit $a \in D_f$. Si f est dérivable en a, on appelle **tangente au point d'abscisse** a la droite d'équation :

$$y = f'(a)\big(x - a\big) + f(a)$$

Définition : Fonction dérivée

On dit que f est **dérivable** sur un intervalle $I \subset D_f$ si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle **fonction dérivée de** f, la fonction définie sur I, qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

II - FORMULES DE DÉRIVATION

Les dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de définition
$k,\ k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b,\ a, b \in \mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	$n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de définition
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

u et v sont dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$.

f	f'
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
$(k\times u)$	$k\times u'$

f	f'
$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

III - COMPOSÉE DE FONCTIONS

Définition : Fonction composée

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

On définit alors pour tout $x \in I$ la fonction composée de g par f, notée $g \circ f$, par :

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$

La notation $g \circ f$ se lit « g rond f ».

Propriété : Dérivée $f \circ g$

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si f est dérivable en $a \in I$ et g est dérivable en $f(a)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'\left(f(a)\right)$$

Dérivées des fonctions composées usuelles

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

f	f'
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
f	f'
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$

Remarque

Attention : en général $g \circ f \neq f \circ g$.

IV - LIEN ENTRE DÉRIVÉE ET VARIATIONS

Propriété : Variations d'une fonction

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Définition : Extremum d'une fonction

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D_f$.

- On dit que f admet un **maximum** en a si pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$.
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Propriété : Déterminer un extremum

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I, ouvert. Alors :

- Si f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a alors f admet un extremum **local** en a.

REMARQUE

Un extremum **local** en a n'est pas nécessairement un extremum sur tout l'ensemble de définition de f mais sur un intervalle ouvert plus petit centré en a.

V - CONVEXITÉ

Dans la suite f désigne une fonction définie sur un intervalle I dérivable de dérivée f' dérivable notée f'' et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Définition

— Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est **convexe**.

— Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est **concave**.

Propriété

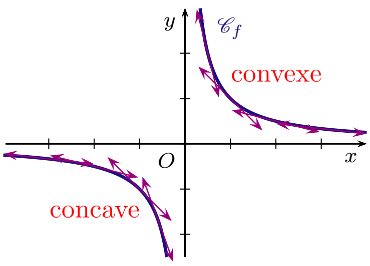
— f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I.

— f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

Propriété

— Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

— Dire que la fonction f est concave sur I signifie que $\mathscr{C}_f$ est située au-dessous de chacune de ses tangentes.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

Définition

Si $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en ce point, alors on dit que ce point est un **point d'inflexion**.

Propriété

Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

REMARQUE

— En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.

— Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.