Chapitre IV

Limites de suites

I Limite de suites

A Suite convergente

Définition : Suite convergente

On dit qu'une suite **converge** lorsqu'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

B Suite divergente

Il y a deux cas pour qu'une suite soit divergente : soit elle n'a pas de limite, soit sa limite est infinie.

Définition : Suite divergente vers $+\infty$

On dit qu'une suite **diverge** vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert du type $]A\ ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Pour tout réel $A > 0$, il existe un rang N tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_n > A$.

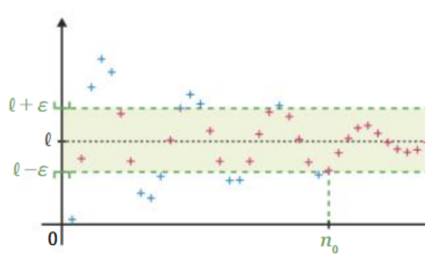
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Définition : Suite divergente vers $-\infty$

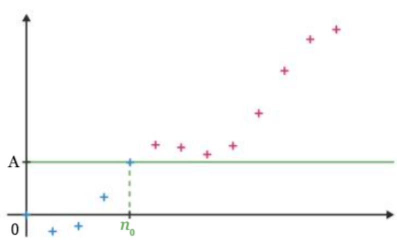
On dit qu'une suite diverge vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert du type $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

Pour tout réel $A > 0$, il existe un rang N tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_n < A$.

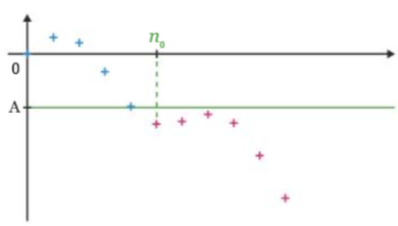
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



Converge vers ℓ



Diverge vers $+\infty$



Diverge vers $-\infty$

Remarque

Certaines suites n'ont pas de limite, par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)$ n'a pas de limite.

C Limites des suites usuelles

Propriété : Limites usuelles

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

D Opérations sur les limites

Somme de limites

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit de limites

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	l_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n$	$l_1 \times l_2$	∞	∞	FI

Quotient de limites

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	l_1	l_1	∞	l_1	∞	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$l_2 \neq 0$	∞	l_2	0	0	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l_1}{l_2}$	0	∞	∞	∞	FI	FI

Remarque

Retenons ces quatre **formes indéterminées** :

$$+\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

E Cas particulier des suites géométriques

Propriété : Limite des suites géométriques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.

1. Si $q \leq -1$ alors la suite n'a pas de limite.
2. Si $-1 < q < 1$ alors la suite converge vers 0.
3. Si $q = 1$ alors la suite est constante et converge vers 1.
4. Si $q > 1$ alors la suite diverge et tend vers $+\infty$.

II Théorèmes de convergence

Théorème : (Théorème de Comparaison)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) aussi.
2. Si (v_n) diverge vers -∞ alors (u_n) aussi.

Théorème : (Théorème d'encadrement)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que

1. À partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
2. (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ.

Alors (v_n) converge aussi vers ℓ .

A Passage à la limite dans une inégalité

Théorème : Les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 telles que à partir d'un certain certain rang on a $u_n < v_n$ alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

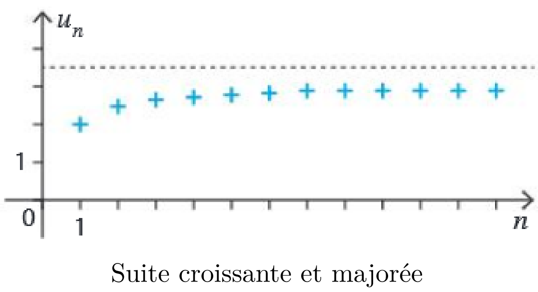
B Théorèmes liés aux suites monotones

Théorème : Suites monotones non bornées

1. Si (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
2. Si (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Théorème : (Théorème de la limite monotone)

1. Toute suite croissante et majorée converge.
2. Toute suite décroissante et minorée converge.



Suite croissante et majorée

Remarque

Attention ce théorème ne donne pas la limite de la suite. Un majorant (ou un minorant) n'est pas forcément cette limite.