Échauffement

Limites de suites

1 Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de chaque suite (u_n) définie ci-dessous puis démontrer cette conjecture.

1. $u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$
4. $u_n = \dfrac{3}{n^2+1}$
5. $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$
6. $u_n = (n+1)(2-\sqrt{n})$
7. $u_n = \dfrac{n^2+1}{\frac{1}{n}-2}$
8. $u_n = -2n^2 + 3n - 5$
9. $u_n = (\sqrt{n}-2)(10 - \dfrac{1}{n})$
10. $u_n = \dfrac{3}{1-2\sqrt{n}}$
11. $u_n = \dfrac{2n}{5} - 8 + \dfrac{2n}{n^2+1}$
12. $u_n = \dfrac{3n^2-5n}{n+1}$
13. $u_n = \dfrac{10^n-5}{10^n+2}$
14. $u_n = \sqrt{2+n^2} - n$
15. $u_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n}$

2 Déterminer par comparaison la limite des suites suivantes :

1. $u_n = n + 1 + (-1)^n$
2. $u_n = n^2 + \sqrt{\dfrac{n+1}{n-2}}$
3. $u_n = -n - \dfrac{n^2+1}{n^2+2}$
4. $u_n = n^3 + (-1)^n$
5. $u_n = \sqrt{n} + \sin(n)$
6. $u_n = 3n - 4\sin(n)$

3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n^2$.
2. En déduire la limite de la suite (v_n).

4 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = 5 - \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de (u_n).
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$5 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

5 (u_n) est la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :
$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$
2. En déduire la limite de (u_n).

6 Montrer que :

1. $u_n = n^2 - 6n + 5$ est minorée par -4.
2. $u_n = -n^2 - 2n + 8$ est majorée par 9.
3. $u_n = \dfrac{2}{n+1}$ est bornée.

7 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2.
2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
3. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

8 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4.
2. En déduire le sens de variation de (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

9 Montrer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n!} = 0$$