BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2023

MATHÉMATIQUES

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : **16**

Ce sujet comporte quatre pages numérotées de 1/5 à 4/5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(2; 5; -1)$ et $B(0; -3; 2)$. Une représentation paramétrique de la droite passant par A et B est :

   a. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = -2t \\ y = -3 - 8t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   c. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2. Soient les droites d et d' de l'espace dont des représentations paramétriques sont données respectivement par $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 - 4t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = -2 + t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Ces droites sont :

   a. Non coplanaires **b.** Parallèles et confondues

   c. Parallèles et non confondues **d.** Sécantes

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

   $$a_n = \frac{1 - 3^n}{1 + 2^n}.$$

   La limite de la suite (a_n) est égale à :

   a. $-\infty$ **b.** -1 **c.** 1 **d.** $+\infty$

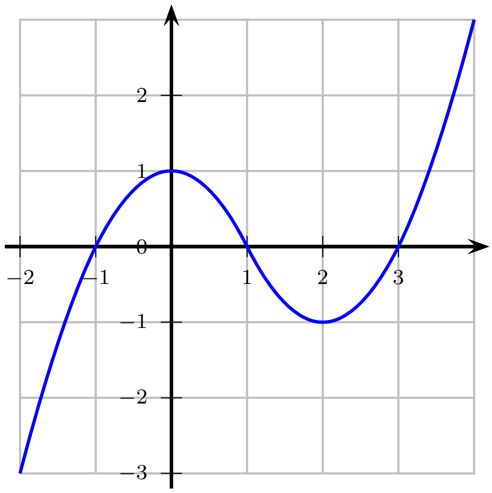
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2]$ est donné par :

x	-2		-1		0		2
variations de f'	1	↘	0	↘	-2	↗	-1

   La fonction f est :

   a. convexe sur $[-2 ; -1]$ **b.** concave sur $[0 ; 1]$
   c. convexe sur $[-1 ; 2]$ **d.** concave sur $[-2 ; 0]$

5. On donne ci-dessus la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a. f est décroissante sur $[0\,;\,2]$

b. f est décroissante sur $[-1\ ;\ 0]$

c. f admet un maximum en 1 sur $[0\,;2]$

d. f admet un maximum en 3 sur $[2\,;\,4]$

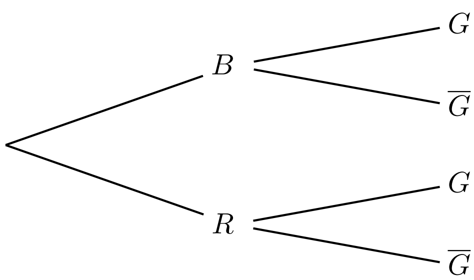
Exercice II — 5 points

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   (a) Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
   (b) On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.
   Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. (a) Montrer que $P(G) = 0,4$.
   (b) Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
   (c) Calculer $P(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
   Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».
   (a) Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.
   (b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice III — 5 points

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
   (a) Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
   (b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
   (c) Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).
2. (a) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   (b) Justifier que la suite (p_n) est convergente.
3. On appelle L la limite de la suite (p_n) et on admet que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

   Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

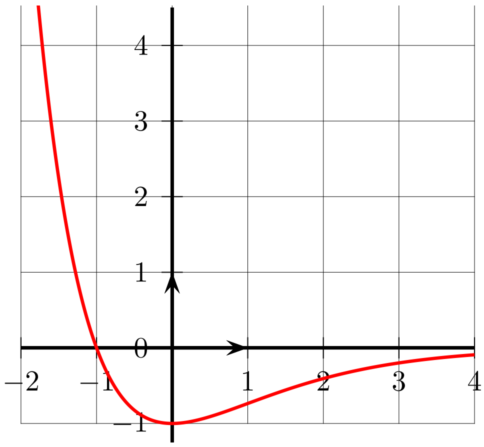
	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

Exercice IV **5 points**

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   (c) Justifier que f admet-elle un maximum et donner la valeur exacte de ce maximum.
   (d) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.
   Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0 ?