BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2022

MATHÉMATIQUES

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : **16**

Ce sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I **5 points**

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs ! ».
Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

	♡	
♡		
		♡

Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 euro sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 euros.
   On appelle G la variable aléatoire correspondant au gain du joueur en euros.
   (a) Justifier que G prend les valeurs -1 et 4.
   (b) Recopier et compléter le tableau suivant :

Gain	-1	4
Probabilité		

   (c) On admet que l'espérance de G est $E(G) = -\dfrac{11}{21}$. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   (a) Donner, en justifiant, la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X = 5)$.
   (c) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice II **5 points**

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1\,;\,7]$ par :

$$f(x) = 1,5x^3 - 9x^2 + 24x + 48.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;\,7]$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,7]$:

(a) Calculer $f'(x)$.

(b) Calculer $f''(x)$.

2. Déterminer sur quel intervalle la fonction f est convexe et les éventuels points d'inflexion.

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1000 et 7000 articles par semaine.

On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note c la fonction définie sur $[1\,;\,7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1\,;\,7]$:

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \frac{48}{x}.$$

On admet que la fonction c est dérivable sur $[1\,;\,7]$. On note c' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,7]$, on a :

$$c'(x) = \frac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2}.$$

2. (a) Étudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1\,;\,7]$.

   (b) Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

Exercice III **5 points**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} & = & 3 - \dfrac{10}{u_n+4} \\ u_0 & = & 5 \end{cases}$

Partie A

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n+1}{1-v_n}$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C

On considère l'algorithme ci-contre.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geqslant 1,01$
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow 3 - \dfrac{10}{u+4}$
Fin du Tant que

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

Exercice IV — 5 points

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.
On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

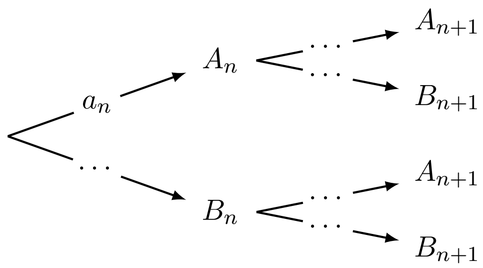
- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de $0,8$;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0,7$.

Pour une entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :
A_n : «la n-ième partie est une partie de type A.»
B_n : «la n-ième partie est une partie de type B.»
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre

   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$



Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.
   (a) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   (c) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.
3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?
   (d) La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?