Chapitre V

La loi binomiale

I Épreuve et loi de Bernoulli

Définition : Épreuve de Bernoulli

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire $\mathscr{E}$ ayant deux issues possibles appelées (par habitude) succès (noté S) et échec (noté E ou encore $\overline{S}$).

Exemple

Un jeu de Pile ou face où obtenir Pile est un succès, ou le lancer d'un dé où obtenir 6 est un succès.

Définition : Loi de Bernoulli

Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de succès et 0 sinon ; si l'on note p la probabilité du succès ; on dit alors que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p. On a donc :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

II Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition : Schéma de Bernoulli

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Lorsque l'on **répète**, n fois et de **manière indépendante** la même épreuve de Bernoulli de paramètre p, on dit que l'on a un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Définition : Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p étant donné, soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de succès. On dit alors que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p. On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$

Théorème : Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout $k \in \{0;1;\cdots;n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque

La probabilité d'avoir n succès est $P(X = n) = p^n$.
La probabilité d'avoir n échecs est : $P(X = 0) = (1-p)^n =$.
En conséquence, la probabilité d'avoir au moins un succès est : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$.

Propriété : Espérance et variance d'une loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

Remarque

L'**espérance** représente le nombre moyen de succès que l'on peut *espérer* obtenir avec cette expérience si on la répète un très grand nombre de fois.

La **variance** mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Plus elle est proche de 0 plus les données sont concentrées et plus elle est grande plus les données sont dispersées.